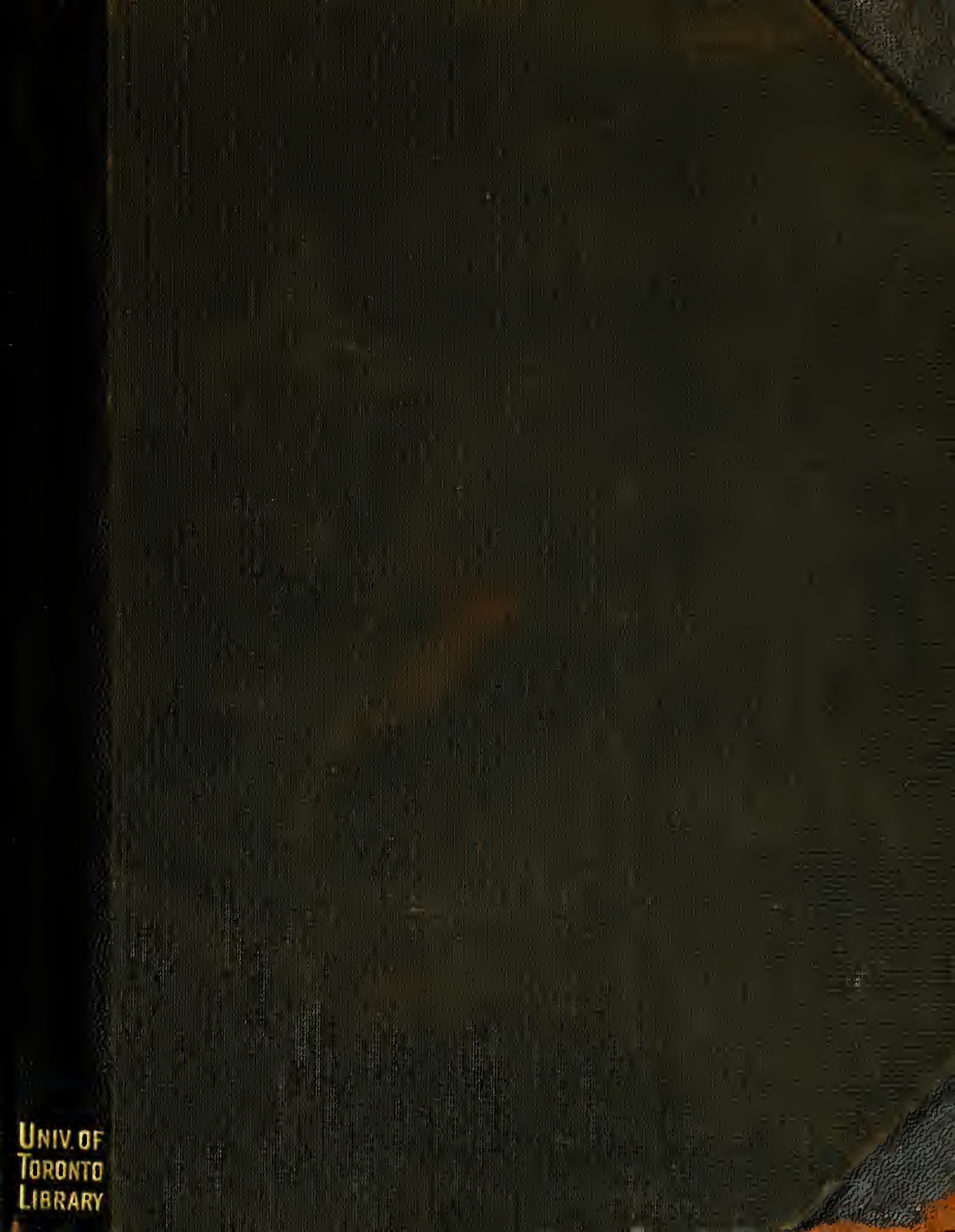

Univ. of
Toronto
Library

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1847

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

SIXIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

G. HUMBERT, E. PICARD.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1914.

(79e Volume de la Collection.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux;

PAR LOUIS **ROCHE**.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour point de départ cette phrase de M. Boussinesq [1], à propos d'une certaine biréfringence spéciale, engendrée dans un corps isotrope transparent par un champ magnétique, et de l'altération qu'elle produit dans la forme circulaire des trajectoires pour des ondes inclinées sur l'axe du champ : « Cette altération, et la double réfraction elliptique spéciale qui en résulte, ne paraissent pas avoir encore été étudiées. »

Cette étude constitue notre première Partie. Elle consiste d'abord à introduire, dans les équations du mouvement, un coefficient ν' représentant cette biréfringence, et à en chercher des solutions du type

---

(1) *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie analytique de la lumière*, t. II, 1903, p. 481. Paris, Gauthier-Villars. Les renvois à ce Volume seront désignés par II.

classique, modifiées par la présence de ce terme : c'est l'objet d'un premier Chapitre.

Un autre est consacré à l'équation aux vitesses ω de propagation des deux systèmes possibles d'ondes planes, un troisième aux conséquences physiques des résultats, un quatrième à la surface des ondes, généralisant celle de Fresnel, avec des différences qui constituent l'un des points nouveaux de ce travail.

L'altération dont il s'agit concerne l'inégalité créée par le champ magnétique entre les trois coefficients a, b, c, figurant dans les trois équations du mouvement de l'éther, et dont le troisième c, corrélatif à l'axe du champ pris pour Oz, cesse d'être égal aux deux premiers a et b. Cette inégalité, comme l'a remarqué M. Boussinesq [1], a pour effet de rendre le corps biréfringent à la manière d'un cristal uniaxe, dont l'axe optique ou principal coïnciderait avec la ligne des pôles de l'aimant. C'est ce qui m'a suggéré l'idée d'une généralisation à deux degrés, dont j'ai fait l'objet de deux autres Parties.

L'une, ma deuxième Partie, où $a \neq b \neq c$, avec un seul coefficient ν de dissymétrie, concernerait des cristaux à deux axes, où la biréfringence prépondérante a jusqu'ici empêché d'observer la polarisation rotatoire magnétique, mais où l'on peut espérer la mettre un jour en évidence avec des courants assez puissants.

L'autre, ma troisième Partie, où $a \neq b \neq c$, mais avec trois coefficients ν, ν_1, ν_2 de dissymétrie dans le sens des axes coordonnés, concernerait des cristaux à deux axes, soumis à un champ magnétique dont la ligne des pôles ne coïnciderait avec aucun des axes principaux. Elle présente le système le plus général d'équations aux dérivées partielles à trois variables, de ce type, et m'a paru offrir, à ce point de vue, un réel intérêt, soit comme représentant un grand nombre de phénomènes encore à découvrir, soit comme conduisant à une forme tout à fait générale et symétrique de surfaces d'ondes, généralisation de celle de Fresnel. Les propriétés de cette dernière, tout à fait distinctes des nôtres, et résultant des travaux de géomètres trop nombreux pour que je puisse les citer ici, ont été réunies et complétées par M. Jules Richard dans sa Thèse (Sorbonne, 1901) [2], où je les ai constamment prises comme termes de comparaison.

---

(1) II, p. 480.

(2) *Sur la surface des ondes de Fresnel*. Châteauroux, P. Langlois et Cie.

J'ai adopté pour ces deux dernières Parties une division en Chapitres de mêmes titres que ceux de la première (Chap. I : Équations du problème; Chap. II : Équation aux vitesses de propagation; Chap. III : Conséquences physiques; Chap. IV : Surface des ondes) dont quelques-uns d'une brièveté qui semblerait les rendre inutiles. Je les ai maintenus afin de conserver entre les trois Parties une symétrie permettant d'y signaler, d'un seul mot, les Chapitres qui les intéressent, à ceux qui me feraient l'honneur de parcourir ce travail, pour y chercher soit des conclusions physiques neuves et à vérifier par l'expérience (Chap. III des trois Parties), soit des développements purement géométriques (Chap. IV des trois Parties).

Toutefois, dans la troisième Partie, j'ai introduit un Chapitre V levant d'un seul coup et pour le cas le plus général la difficulté suivante : L'analyse actuelle suppose les ondes planes latéralement illimitées. Subsistera-t-elle avec un rayon lumineux supposé latéralement limité pour rentrer dans le cas de la réalité? La réponse affirmative a été donnée par M. Boussinesq dans un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (¹) pour le cas général $a \neq b \neq c$, mais dans l'hypothèse ordinaire $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0$. L'objet de ce Chapitre est d'étendre la conclusion de ce Mémoire à notre cas général malgré la présence de ν, ν_1, ν_2 quelconques.

J'ajoute que l'étude des divers cas suggérés par la discussion de la surface des ondes dans la troisième Partie entraînerait à des développements trop nombreux et considérables pour être abordés avant que l'expérience ait montré lesquels de ces cas seront physiquement intéressants.

Je ne veux pas terminer cette Introduction sans un hommage de respectueuse gratitude à mes vénérés maîtres, MM. Boussinesq et Kœnigs. Si je dois au Traité aujourd'hui classique du premier le point de départ et à ses conseils l'interprétation physique de ces recherches, je voudrais mettre un reflet des belles leçons du second dans l'étude géométrique des surfaces auxquelles elles m'ont conduit.

(¹) 6ᵉ série, t. VII, fasc. 3, 1911 (*Contribution à l'optique cristalline*, p. 335 et suiv.).

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Je rappelle d'abord les notations adoptées par M. Boussinesq :

ξ, η, ζ représentent les composantes du déplacement vibratoire de la molécule d'éther dont les coordonnées d'équilibre sont x, y, z;

θ est la dilation cubique

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

Δ_2 représente le paramètre différentiel du second ordre de Lamé

$$\Delta_2 f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Alors le phénomène de la polarisation rotatoire magnétique peut être étudié par l'analyse suivante ([1]).

Dans les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{aligned} \right.$$

on modifie d'abord les résistances des premiers membres en y introduisant trois binomes, où d, e, f sont les trois coefficients d″, e″, f″ du Mémoire de M. Boussinesq (*Journal de Mathématiques*, 6e série,

([1]) II, p. 476-480.

t. VII, fasc. 3, 1911, p. 326), ce qui donne

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\Delta_2(\mathrm{f}\eta - e\zeta) = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\eta}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\Delta_2(\mathrm{d}\zeta - f\xi) = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\Delta_2(\mathrm{e}\xi - d\eta) = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Or, dans une première approximation, si l'on faisait $\mathrm{d} = \mathrm{e} = \mathrm{f} = 0$, on aurait (II, p. 272) $\theta = 0$, et par suite

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta_2\xi, \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Delta_2\eta, \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\zeta.$$

De plus, s'il s'agit de mouvements pendulaires de période $\frac{2\pi}{k}$, auxquels on cherche à réduire le phénomène [1], on aura

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\zeta, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -k^2\eta, \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -k^2\zeta,$$

ce qui permet de remplacer $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\eta$, $\Delta_2\zeta$ par $-\frac{k^2}{a^2}\xi$, $-\frac{k^2}{a^2}\eta$, $-\frac{k^2}{a^2}\zeta$, et d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2}\frac{d}{dt}(f\eta - \mathrm{e}\zeta) &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2}\frac{d}{dt}(d\zeta - \mathrm{f}\xi) &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{k^2}{a^2}\frac{d}{dt}(e\xi - \mathrm{d}\eta) &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{aligned}$$

Si l'on a pris pour axe Oz la ligne des pôles du champ magnétique, on devra faire $d = e = 0$, et en posant $\mathrm{f} = \nu$, où ν est un petit coefficient, fonction de la nature du corps transparent et de l'intensité du champ magnétique, on obtiendra les équations (α) [2].

Mais nous voulons de plus, et c'est le premier objet de ce travail, tenir compte de la biréfringence spéciale engendrée par le champ magnétique, et dont l'étude restait à faire [3].

---

(1) II, p. 438.

(2) II, p. 478.

(3) II, p. 480-481.

La même isotropie dissymétrique, autour de l'axe du champ, entraîne, pour représenter cette biréfringence, l'introduction, dans la troisième équation seule, d'un terme unique $+\nu'\Delta_2\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, qui, par les raisonnements précédents, n'est autre que $+\nu'\frac{k^2}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ pourvu que ν' soit assez petit. Le coefficient de $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ dans cette troisième équation deviendra donc

$$\frac{1}{a^2}+\frac{\nu' k^2}{a^2}=\frac{1}{c^2}, \tag{3}$$

en introduisant le nouveau coefficient c^2 comme s'il s'agissait de la biréfringence d'un cristal uniaxe dont l'axe optique coïnciderait avec la ligne des pôles du champ. Ce second coefficient ν' est fonction, comme ν, de la nature du corps transparent et de l'intensité du champ magnétique. Il est plus difficile à mettre en évidence expérimentalement, ce qui serait une raison de le supposer plus petit que ν. Mais, comme ce sont des expériences d'un autre ordre ([1]), nous ne préjugerons pas cette question et garderons ν et ν' indépendants l'un de l'autre, en négligeant leurs carrés et leur produit.

J'ajoute que, pour l'homogénéité, ν' doit être de l'ordre du carré d'un temps, comme ν^2, pour que $\frac{1}{a^2}+\nu'\frac{k^2}{a^2}$ soit homogène et de dimensions T^2.

Les équations prennent alors la forme définitive

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{k^2}{a^2}\nu\frac{d\eta}{dt}&=\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx},\\
\frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{k^2}{a^2}\nu\frac{d\xi}{dt}&=\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy},\\
\frac{1}{c^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\qquad\qquad&=\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

C'est la généralisation du système (α) de la page 478, le coefficient $\frac{1}{a^2}$ de la troisième équation étant remplacé par $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\nu'\frac{k^2}{a^2}$ et ν' étant toujours assez petit, s'il est négatif, pour que $\frac{1}{c^2}$ soit positif.

([1]) Quirino MAJORANA, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXXV, 21 juillet 1902, p. 159.

Cherchons, comme on le fait dans les questions de ce genre, à vérifier ces équations par des solutions symboliques de la forme

$$\frac{\xi}{L} = \frac{\eta}{M} = \frac{\zeta}{N} = e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}, \tag{5}$$

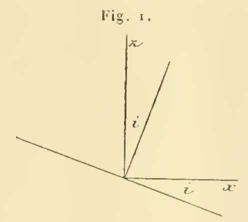
les solutions physiques étant les parties réelles des solutions analytiques imaginaires que nous obtiendrons.

Toujours d'après la même isotropie dissymétrique autour de l'axe Oz du champ, nous choisirons les axes Oxy, dans le plan normal à cet axe, de façon à faire passer Oy par la trace du plan de l'onde $lx + my + nz = 0$ sur ce plan normal, c'est-à-dire à supposer $m = 0$, ce qui, avec les notations ordinaires

$$l = \frac{\alpha}{\omega}, \qquad m = \frac{\beta}{\omega}, \qquad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

(α, β, γ cosinus directeurs de la normale au plan de l'onde, ω vitesse

Fig. 1.



de propagation), donne

$$\alpha = \sin i, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \cos i;$$

$$l = \frac{\sin i}{\omega}, \qquad m = 0, \qquad n = \frac{\cos i}{\omega};$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -k\sqrt{-1}\,l\xi, \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -k^2 l^2 \xi, \qquad \Delta_2\xi = -k^2(l^2+n^2)\xi = -\frac{k^2}{\omega^2}\xi;$$

$$\frac{d\xi}{dt} = k\sqrt{-1}\,\xi, \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\xi, \qquad \theta = -k\sqrt{-1}(l\xi + n\zeta).$$

Ces valeurs, portées dans les équations, donnent, pour déterminer L, M, N, après suppression du facteur commun $k^2 e^{k(t-lx-nz)\sqrt{-1}}$, les trois

équations homogènes

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2}+l^2\right)L+\frac{k\nu}{a^2}M\sqrt{-1}+nlN=0,\\ &-\frac{k\nu}{a^2}L\sqrt{-1}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)M=0,\\ &nlL+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\omega^2}+n^2\right)N=0.\end{aligned}\right.$$

La condition de compatibilité de ces trois équations homogènes s'obtient en égalant à zéro leur déterminant

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2}+l^2 & \frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & nl\\ -\frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & \frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2} & 0\\ nl & 0 & \frac{1}{c^2}-\frac{1}{\omega^2}+n^2 \end{vmatrix}=0$$

et peut recevoir deux formes différentes :

1° En remplaçant l par $\frac{\sin i}{\omega}$ et n par $\frac{\cos i}{\omega}$, on aura l'équation aux vitesses ω pour une onde de direction i, savoir :

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-\frac{\cos^2 i}{\omega^2} & \frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & \frac{\sin i\cos i}{\omega^2}\\ -\frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & \frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2} & 0\\ \frac{\sin i\cos i}{\omega^2} & 0 & \frac{1}{c^2}-\frac{\sin^2 i}{\omega^2} \end{vmatrix}=0;$$

2° En y remplaçant $\frac{1}{\omega^2}$ par l^2+n^2, on aura l'équation tangentielle de la méridienne de la surface des ondes, enveloppe (de révolution) des traces $lx+nz=1$ des plans d'onde,

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2}-n^2 & \frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & nl\\ -\frac{k\nu}{a^2}\sqrt{-1} & \frac{1}{a^2}-(l^2+n^2) & 0\\ nl & 0 & \frac{1}{c^2}-l^2 \end{vmatrix}=0.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES ω DE PROPAGATION.

L'équation aux vitesses de propagation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \left(1-\frac{\cos^2 i}{\omega^2}a^2\right) & k\nu\sqrt{-1} & \frac{a^2\sin i\cos i}{\omega^2} \\ -k\nu\sqrt{-1} & \left(1-\frac{a^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ \frac{a^2\sin i\cos i}{\omega^2} & 0 & \left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{\sin^2 i}{\omega^2}a^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant et posant pour un moment $1-\frac{a^2}{\omega^2}=X$,

$$\left(a^2\frac{\cos^2 i}{c^2}+\sin^2 i\right)X^2+\left[\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)-k^2\nu^2\right]X\sin^2 i-k^2\nu^2\left(\frac{a^2}{c^2}-\sin^2 i\right)=0.$$

Or, $\frac{a^2}{c^2}=1+\nu' k^2$, et le terme indépendant de X est, par suite,

$$-k^2\nu^2(\cos^2 i+\nu' k^2).$$

Donc, même en supposant ν' négatif, comme ce coefficient reste très petit, il faudrait supposer i très voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que la parenthèse pût devenir positive, et les *deux racines* X *de même signe*.

Dans les expériences ordinaires, *elles resteront de signes contraires*, la forme définitive de l'équation étant

$$(10)\qquad (1+\nu' k^2\cos^2 i)X^2+(\nu'-\nu^2)k^2X\sin^2 i-k^2\nu^2(\nu' k^2+\cos^2 i)=0,$$

où l'on aura toujours $1+\nu' k^2>0$, de sorte que le premier coefficient est positif, même si $\nu'<0$.

La condition de réalité des racines est

$$(\nu'-\nu^2)^2k^2\sin^4 i+4k^2\nu^2(\nu' k^2+\cos^2 i)(1+\nu' k^2\cos^2 i)\geqq 0.$$

Elle est évidemment vérifiée, comme nous venons de le voir, pour $\nu'>0$. Mais, pour $\nu'<0$, elle le sera encore tant que l'angle i n'atteindra pas des valeurs assez voisines de $\frac{\pi}{2}$ pour que $\cos^2 i$ puisse être de l'ordre de ν' et compensé par $\nu' k^2$.

L'observation du phénomène pour des valeurs de i voisines de $\frac{\pi}{2}$ prouvera donc que ν' ne peut pas atteindre de valeurs négatives telles que, par exemple, pour $i = \frac{\pi}{2}$, on ait

$$(\nu' - \nu^2)^2 + 4\nu'\nu^2 k^2 < 0.$$

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

La condition de compatibilité étant supposée remplie, les équations homogènes fournissent, pour L, M, N, un système de valeurs proportionnelles, que nous allons interpréter physiquement.

A cet effet, écrivons-les, en remplaçant $l = \frac{\sin i}{\omega}$, $n = \frac{\cos i}{\omega}$ et groupant les termes,

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)L + \frac{\sin i}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i) = -\frac{k\nu}{a^2} M\sqrt{-1}, \\ &-\frac{k\nu}{a^2} L\sqrt{-1} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)M = 0, \\ &\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)N + \frac{\cos i}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i) = 0. \end{aligned} \right.$$

1° Multiplions-les par $\sin i$, 0, $\cos i$, et ajoutons. Il vient

$$\frac{L \sin i + N \cos i}{a^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) N \cos i - \frac{k\nu}{a^2} M \sin i \sqrt{-1}.$$

Ce résultat montre que $L \sin i + N \cos i$ est de l'ordre de petitesse du moins petit des deux ν et ν', à cause de $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} = -\frac{\nu' k^2}{a^2}$, ou *qu'il y a quasi-transversalité des vibrations*, comme dans le cas de la page 478 (II) que nous généralisons ici.

2° Multiplions-les ensuite par L, M, N et ajoutons. Il vient

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)(L^2 + M^2 + N^2) + \frac{\nu' k^2}{a^2} N^2 + \frac{1}{\omega^2}(L \sin i + N \cos i)^2 = 0.$$

Ce résultat montre que $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)(L^2 + M^2 + N^2)$ est de l'ordre de ν' et de ν^2, et non plus précisément de ν^2, comme dans le cas de la page 479. Or, d'après la seconde de nos équations, $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$ M est de l'ordre de ν. Donc $\frac{L^2 + M^2 + N^2}{M}$ est de l'ordre de $\frac{\nu'}{\nu}$, c'est-à-dire $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ peut être fini si ν' est du même ordre que ν, *ce que l'expérience décidera.*

Tirons alors des équations linéaires rendues compatibles des valeurs proportionnelles à L, M, N. Les deux dernières donneront

$$\frac{L}{\omega^2\left(1 - \frac{a^2}{\omega^2}\right)} = \frac{M}{k\nu\omega^2\sqrt{-1}} = \frac{N}{-c^2 \sin i \cos i \frac{\omega^2 - a^2}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i}}.$$

On aura donc, en prenant les parties réelles de ces solutions, les composantes du déplacement proportionnelles à

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \omega_1^2\left(1 - \frac{a^2}{\omega_1^2}\right)\cos\left(kt - k\frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_1}\right), \\ \eta &= \omega_1^2 k\nu \sin\left(kt - k\frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_1}\right), \\ \zeta &= -c^2 \sin i \cos i \frac{\omega_1^2 - a^2}{\omega_1^2 - c^2 \sin^2 i}\cos(kt \ldots), \end{aligned} \right.$$

pour la trajectoire correspondant à la première racine ω_1 de l'équation aux vitesses de propagation;

$$(12') \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \omega_2^2\left(1 - \frac{a^2}{\omega_2^2}\right)\cos\left(kt - k\frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_2}\right), \\ \eta &= \omega_2^2 k\nu \sin\left(kt - k\frac{x \sin i + z \cos i}{\omega_2}\right), \\ \zeta &= -c^2 \sin i \cos i \frac{\omega_2^2 - a^2}{\omega_2^2 - c^2 \sin^2 i}\cos(kt \ldots), \end{aligned} \right.$$

pour les trajectoires correspondant à la seconde racine ω_2.

Ces trajectoires sont donc des ellipses, intersections des cylindres

$$(13) \quad \frac{\xi^2}{(\omega^2 - a^2)^2} + \frac{\eta^2}{\omega^4 k^2 \nu^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

(dépendant de i par l'intermédiaire de $\omega = \omega_1$ pour l'une et $\omega = \omega_2$

pour l'autre) par deux plans différant en réalité pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$, mais confondus, à notre approximation, avec le plan

$$\xi \sin i + \zeta \cos i = 0$$

de l'onde, puisque nous avons vérifié que $L \sin i + N \cos i$ était de l'ordre de ν' et de ν. Seulement, *le fait essentiel, au point de vue physique, consiste en ce que*, les deux racines ω_1, ω_2 donnant des signes contraires au facteur $1 - \frac{a^2}{\omega^2}$, comme on l'a vu en ordonnant l'équation en ω par rapport à $1 - \frac{a^2}{\omega^2}$, *ces ellipses sont parcourues dans des sens différents.*

Éléments de chacune de ces ellipses. — Elle est située dans le plan

$$\frac{\zeta}{\xi} = -\frac{c^2 \sin i \cos i}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i} = -\operatorname{tang} \psi,$$

où nous savons que ψ est voisin de i.

Les longueurs des carrés des demi-axes sont donc (à un facteur constant près)

$$\frac{(\omega^2 - a^2)^2}{\cos^2 \psi} \quad \text{et} \quad \omega^4 k^2 \nu^2.$$

Leur rapport est donc

$$\left(\frac{\omega^2 - a^2}{\omega^2 k \nu \cos \psi}\right)^2 = \left(\frac{1 - \frac{a^2}{\omega^2}}{k \nu \cos \psi}\right)^2.$$

Or, les racines de l'équation en X sont

$$X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -(\nu' - \nu^2) k^2 \sin^2 i \\ \quad \pm k |\nu| \cos i \sqrt{1 + \nu' k^2 \left(\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i}\right) + k^2 \left(\frac{\nu'}{\nu} - \nu\right)^2 \frac{\sin^2 i \operatorname{tang}^2 i}{4} + \nu'^2 k^4} \end{array} \right\}}{2(1 + \nu' k^2 \cos^2 i)},$$

où $|\nu|$ désigne la valeur absolue de ν.

I. A l'approximation $\psi = i$, qu'il est logique de faire, puisque la comparaison des deux ellipses est surtout intéressante si on les consi-

dère comme dans le même plan, les valeurs absolues des demi-axes sont, à des facteurs constants près,

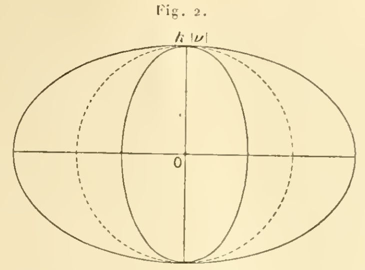
$$A = \left|1 - \frac{a^2}{\omega^2}\right| \frac{1}{\cos i} \quad \text{et} \quad B = k|\nu|.$$

Or

$$\left(1 - \frac{a^2}{\omega^2}\right)\frac{1}{\cos i}$$
$$= \frac{1}{2(1 + \nu' k^2 \cos^2 i)} \left\{ -(\nu' - \nu^2) k^2 \sin i \operatorname{tang} i \pm k|\nu| \left[1 + \frac{\nu'}{2} k^2 \left(\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i}\right) + \ldots\right]\right\},$$

la racine positive correspondant au signe supérieur et la négative au signe inférieur.

Fig. 2.



Je désigne alors par (A_1, B_1), (A_2, B_2) les valeurs de A, B pour les deux ellipses, qui correspondent aux racines ω_1, ω_2; on a

$$B_1 = B_2 = k|\nu|, \qquad A_1 = \left(1 - \frac{a^2}{\omega_1^2}\right)\frac{1}{\cos i}, \qquad A_2 = \left(1 - \frac{a^2}{\omega_2^2}\right)\frac{1}{\cos i}$$

et, par suite,

$$(A_1 - B_1)(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) = -\frac{\nu' - \nu^2}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i} + k|\nu|\left[\nu' \frac{k^2}{2}\left(-\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i}\right) + \ldots\right],$$
$$(A_2 - B_2)(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) = +\frac{\nu' - \nu^2}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i} + k|\nu|\left[\nu' \frac{k^2}{2}\left(-\cos^2 i + \frac{1}{\cos^2 i}\right) + \ldots\right].$$

Donc, à notre approximation, le premier terme $\frac{\nu'}{2} k^2 \frac{\sin^2 i}{\cos i}$ étant prépondérant, ces différences sont de signes contraires. *Le grand axe de chacune des ellipses est sur la direction du petit axe de l'autre*, ce qui pourrait conduire à une vérification expérimentale.

De plus, *l'écart relatif des deux axes est proportionnel à k^2, c'est-à-dire à l'inverse du carré de la période vibratoire des radiations*, ce que l'expérience pourrait peut-être aussi vérifier.

Enfin, les deux ellipses *se réduiront en même temps*, *toujours à notre approximation*, *à un cercle de rayon* $k|\nu|$, dans le *cas singulier où il existerait la relation* $\nu' = \nu^2$ entre le coefficient ν de dissymétrie et le coefficient ν' de biréfringence.

Si donc *l'expérience décelait l'existence de deux vibrations circulaires de sens opposés*, on serait en présence d'un corps pour lequel cette relation $\nu' = \nu^2$ serait vérifiée, et par suite où tous nos calculs se simplifieraient considérablement, comme nous allons l'indiquer.

Cas singulier $\nu' = \nu^2$. — L'équation aux vitesses se réduit à

$$(1 + \nu' k^2 \cos^2 i) X^2 - k^2 \nu^2 (k^2 \nu^2 + \cos^2 i) = 0,$$

et les deux racines $X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2}$ sont égales et de signes contraires :

$$1 - \frac{a^2}{\omega_1^2} = k|\nu| \cos i \left[1 + \frac{k^2 \nu^2}{2} \left(\frac{1}{\cos^2 i} - \cos^2 i \right) + \ldots \right],$$

$$1 - \frac{a^2}{\omega_2^2} = - k|\nu| \cos i \left[1 + \ldots \right],$$

d'où

$$a^2 \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right) = k|\nu| \cos i \left[2 + k^2 \nu^2 \left(\frac{1}{\cos^2 i} - \cos^2 i \right) + \ldots \right]$$

ou

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} k|\nu| \cos i [2 + \ldots]$$

ou sensiblement

$$\omega_1 - \omega_2 = a\, k|\nu| \cos i,$$

comme dans la polarisation rotatoire magnétique.

Cette analyse exclut :

1° Le cas $i = \frac{\pi}{2}$, où $X = 1 - \frac{a^2}{\omega^2} = \pm k^2 \nu^2$,

$$1 - \frac{a^2}{\omega_1^2} = k^2 \nu^2 :$$

$$\frac{\omega_1^2}{a^2} = \frac{1}{1 - k^2 \nu^2} = 1 + k^2 \nu^2 \ldots, \qquad \frac{\omega_1}{a} = 1 + \frac{k^2 \nu^2}{2} \ldots$$

et

$$1 - \frac{a^2}{\omega_2^2} = - k^2 \nu^2 :$$

$$\frac{\omega_2^2}{a^2} = \frac{1}{1 + k^2\nu^2} = 1 - k^2\nu^2 \ldots, \qquad \frac{\omega_2}{a} = 1 - \frac{k^2\nu^2}{2} \ldots;$$

ou sensiblement

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{a} = k^2\nu^2.$$

2° Le cas où i serait assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ pour que $\cos i$, sans être nul, fût de l'ordre de $k\nu$ et empêchât le développement ci-dessus du radical; prenons, par exemple, comme valeur limite, $\cos^2 i = k^2\nu^2$, ce qui donne

$$X^2(1 + k^4\nu^4) = 2k^4\nu^4, \qquad X = \frac{k^2\nu^2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + k^4\nu^4}}.$$

Ce sont donc des cas tout à fait nouveaux, qu'il serait intéressant de vérifier en faisant varier l'inclinaison i et la radiation k.

II. A une plus grande approximation, au lieu de $\psi = i$, reprenons

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{c^2 \sin i \cos i}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i} = \operatorname{tang} i \left(1 - \frac{\omega^2 - c^2}{\omega^2 - c^2 \sin^2 i}\right).$$

Pour i assez éloigné de $\frac{\pi}{2}$, on obtient bien $\operatorname{tang}\psi$ voisin de $\operatorname{tang} i$. On peut d'ailleurs écrire

$$\operatorname{tang}(i - \psi) = \left(1 - \frac{c^2}{\omega^2}\right) \operatorname{tang} i = \frac{\nu' k^2 + X}{1 + \nu' k^2} \operatorname{tang} i.$$

Si l'on réduit les angles à leurs tangentes, à une approximation justifiée par leur petitesse, il viendra

$$i - \psi_1 = \frac{X_1 + \nu' k^2}{1 + \nu' k^2} \operatorname{tang} i,$$

$$i - \psi_2 = \frac{X_2 + \nu' k^2}{1 + \nu' k^2} \operatorname{tang} i,$$

$$\psi_2 - \psi_1 = \frac{X_1 - X_2}{1 + \nu' k^2} \operatorname{tang} i.$$

Or, nous avons vu que la partie principale de la différence des

racines est $k|\nu|\cos i$. On a donc

$$\psi_2 - \psi_1 = k|\nu|\sin i + \ldots$$

du même ordre.

A cette approximation, ψ_1 et ψ_2 ne diffèrent pas moins l'un de l'autre, comme ordre infinitésimal, qu'ils ne diffèrent de i.

D'autres conséquences physiques, à vérifier par l'expérience, résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

I. — Propriétés générales de la méridienne.

D'après l'équation (9) du Chapitre I, la surface des ondes, de révolution autour de Oz, a pour méridienne une courbe dont l'équation tangentielle en coordonnées (l, n), c'est-à-dire comme enveloppe de la trace $lx + nz = 1$ du plan d'onde, est

$$(14) \qquad [1 - a^2(l^2 + n^2)][1 - c^2 l^2 - a^2 n^2] - k^2\nu^2(1 - c^2 l^2) = 0.$$

Pour $\nu = 0$, on retrouve la décomposition de la méridienne en un cercle et une ellipse, c'est-à-dire de la surface en une sphère et un ellipsoïde de révolution se raccordant à leurs deux pôles sur Oz.

Cette méridienne est symétrique par rapport à chacun des deux axes Ox et Oz.

Rendue homogène, c'est-à-dire pour le plan $lx + nz = p$, cette équation devient

$$(15) \qquad [p^2 - a^2(l^2 + n^2)][p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2] - k^2\nu^2 p^2(p^2 - c^2 l^2) = 0,$$

et ses dérivées partielles sont :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l} = -c^2 l[p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - a^2 l[p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2] + k^2\nu^2 p^2 c^2 l,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -a^2 n[p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - a^2 n[p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p} = p[p^2 - a^2(l^2 + n^2) + p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2 - 2k^2\nu^2 p^2 + k^2\nu^2 c^2 l^2].$$

Alors les tangentes parallèles à Ox, $l=0$, sont données par

$$(p^2-a^2n^2)^2-k^2\nu^2p^4=0,$$
$$p^2-a^2n^2=\pm k\nu p^2,$$
$$p^2(1\mp k\nu)=a^2n^2,$$
$$\frac{p^2}{n^2}=\frac{a^2}{1\mp k\nu}.$$

Le point de contact, sur Oz ($l=0$), est donné par

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-2a^2n(p^2-a^2n^2)=\mp 2a^2nk\nu p^2,$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p}=p[2(p^2-a^2n^2)-2k^2\nu^2p^2]=2p[\pm k\nu p^2-k^2\nu^2p^2]=-2k\nu p^3(\pm 1-k\nu),$$

dont le quotient est

$$\frac{\pm a^2n}{p(\pm 1-k\nu)}=\frac{\pm a^2n}{p(1\mp k\nu)}=\pm\frac{a^2}{a}\frac{\sqrt{1\mp k\nu}}{1\mp k\nu}=\pm\frac{a}{\sqrt{1\mp k\nu}},$$

comme vérification.

Ce sont les quatre sommets de la courbe sur Oz.

Les tangentes parallèles à Oz, $n=0$, sont de même

$$(p^2-a^2l^2)(p^2-c^2l^2)-k^2\nu^2p^2(p^2-c^2l^2)=0:$$

1° c'est-à-dire d'abord

$$\frac{p^2}{l^2}=c^2,$$

dont les points de contact, sur Ox, sont donnés par

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l}&=-c^2l[p^2-a^2l^2]+k^2\nu^2p^2c^2l\\&=c^2l^3(a^2-c^2+k^2\nu^2c^2),\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p}&=p[(p^2-a^2l^2)-2k^2\nu^2p^2+k^2\nu^2c^2l^2]\\&=pl^2\{c^2-a^2-k^2\nu^2c^2\},\end{aligned}$$

dont le quotient est

$$-\frac{c^2l}{p}=\mp c,$$

comme vérification (ce sont deux sommets de la courbe sur Ox);

2° c'est-à-dire ensuite

$$p^2 = a^2l^2 + k^2\nu^2p^2, \qquad p^2(1-k^2\nu^2) = a^2l^2, \qquad \frac{p^2}{l^2} = \frac{a^2}{1-k^2\nu^2}.$$

Les points de contact, sur Ox ($n = 0$), sont donnés par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l} &= -c^2l[p^2-a^2l^2] - a^2l[p^2-c^2l^2] + k^2\nu^2p^2c^2l \\ &= -lp^2[(a^2-c^2)+c^2k^2\nu^2], \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p} &= p[p^2-a^2l^2+p^2-c^2l^2-2k^2\nu^2p^2+k^2\nu^2c^2l^2] \\ &= pl^2(a^2-c^2+c^2k^2\nu^2), \end{aligned}$$

dont le quotient est $-\frac{p}{l}$ comme vérification.

(Ce serait $\frac{p}{l}$ avec $lx+nz+p=0$ de la théorie classique des coordonnées tangentielles.)

Les deux sommets sur Oz positif ont donc pour cotes

$$\frac{p}{n} = \frac{a}{\sqrt{1\mp k\nu}} = a(1\mp k\nu)^{-\frac{1}{2}} = a\left(1\pm\frac{k}{2}\nu+\dots\right)$$

et ne peuvent coïncider.

Les deux sommets sur Ox positif ont donc pour abscisses

$$\frac{p}{l} = \frac{a}{\sqrt{1-k^2\nu^2}} = a(1-k^2\nu^2)^{-\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{k^2\nu^2}{2}-\dots\right),$$

$$\frac{p}{l} = c.$$

Pour comparer ces deux derniers, il faut comparer $\frac{a^2}{1-k^2\nu^2}$ à c^2, ou a^2 à $c^2(1-k^2\nu^2)$, ou c^2-a^2 à $c^2k^2\nu^2$.

Cette même équation (15) va nous servir à chercher si la méridienne a des tangentes doubles réelles. En effet, soit $\frac{p}{n}$ la cote du point où une telle tangente rencontrerait Oz. $\frac{l}{n}$ sera donné par l'équation bicarrée

$$(16) \qquad a^2c^2l^4 - [(a^2+c^2)(p^2-a^2n^2) - c^4k^2\nu^2p^2]l^2n^2 + [(p^2-a^2n^2)^2 - k^2\nu^2p^4]n^4 = 0$$

qui devrait avoir deux racines égales, d'où

$$(17)\quad f=(a^2-c^2)^2(p^2-a^2n^2)^2-2k^2\nu^2(a^2+c^2)c^2p^2(p^2-a^2n^2)\\ +c^4k^4\nu^4p^4+4k^2\nu^2a^2c^2p^4=0,$$

équation du second degré en $\frac{p^2-a^2n^2}{p^2}$, dont le discriminant est

$$-4k^2\nu^2a^2c^2[(a^2-c^2)^2-k^2\nu^2c^4].$$

Or nous avons posé, d'après (3),

$$c^2+\nu'c^2k^2=a^2,$$

et le discriminant devient

$$-4k^2\nu^2a^2c^2(k^2\nu'^2-\nu^2);$$

d'où deux cas extrêmes à distinguer, en excluant le cas limite où $k^2\nu'^2=\nu^2$, qui sera étudié plus loin à part (§ II).

(Il faut d'ailleurs remarquer que ces conditions dépendant de la période vibratoire $\frac{1}{k}$, *un même corps pourrait réaliser l'une pour certaines radiations et la condition contraire pour d'autres, se prêtant ainsi à de curieuses vérifications expérimentales.*)

1° Si $k|\nu'|>|\nu|$, (17) n'a pas de racines réelles. *Il n'y a pas de tangentes doubles réelles à la méridienne*, la surface de révolution n'admet pas de cône circonscrit à deux parallèles de contact.

2° Si $-|\nu|<k\nu'<|\nu|$, (17) a des racines $\frac{p^2-a^2n^2}{p^2}$ réelles et positives, ce qui donne, pour les points où se croiseraient sur Oz les tangentes doubles, des cotes $\frac{p}{n}$ supérieures en valeur absolue à a.

Mais, pour que ces tangentes doubles soient réelles, il faut encore que $1-\frac{a^2n^2}{p^2}$ soit $\leqq 1$, pour que $\frac{a^2n^2}{p^2}$ soit positif ou nul, et par suite acceptable.

Or

$$f(1)=(a^2-c^2+c^2k^2\nu^2)^2>0.$$

Donc 1 est toujours en dehors des racines. Les deux conviendront si 1 est au-dessus. Aucune ne conviendra si 1 est au-dessous.

Or, leur demi-somme est $\frac{(a^2+c^2)c^2k^2\nu^2}{(a^2-c^2)^2}$.

Le dénominateur, qui est de l'ordre de ν'^2, nous l'avons vu, sera, dans les cas les plus fréquents, inférieur au numérateur qui est de l'ordre de ν^2. Donc cette demi-somme sera >1, et avec elle les deux racines, qui ne conviendront pas. *Il n'y aura pas, en général, de tangentes doubles, résultat capital et nouveau pour une surface d'ondes.*

Le cas où la demi-somme serait 1 est celui où

$$a^2-c^2=\frac{c^2}{2}k^2\nu^2\pm\sqrt{\frac{c^4}{4}k^4\nu^4+2c^4k^2\nu^2},$$

(17 *bis*) $$=\frac{c^2}{2}k^2\nu^2\pm c^2k\nu\sqrt{2+\frac{k^2\nu^2}{4}}.$$

Le cas où $f(1)$ serait nul est celui où

$$a^2-c^2=-c^2k^2\nu^2$$

et sera traité à part (§ III), $\nu'=-\nu^2$.

Le cas où les racines sont égales est celui où

$$a^2-c^2=\pm c^2k\nu.$$

Mais les racines $\frac{p^2-a^2n^2}{p^2}$ étant supposées réelles, on a

$$|a^2-c^2|^2<k^2\nu^2c^4;$$

la demi-somme ne peut donc pas être égale à 1 puisque

$$|a^2-c^2|<c^2k|\nu|,$$

et que a^2-c^2 aurait alors pour partie principale $\pm c^2k|\nu|\sqrt{2}$ d'après (17 *bis*).

Donc $f(1)>0$, demi-somme >1, les deux racines <1, *aucune tangente double.*

Certains des résultats ci-dessus vont se retrouver dans l'étude des cas de décomposition. Le *principal, l'absence de tangentes doubles*, aurait pu être établi directement par les substitutions suivantes à la place de p^2 : $\varphi(+\infty)>0$ à cause de $1-k^2\nu^2>0$ vu la petitesse de ν;

$$\varphi(c^2l^2+a^2n^2)=-k^2\nu^2(c^2l^2+a^2n^2)a^2n^2<0,$$
$$\varphi(0)=a^2(l^2+n^2)(c^2l^2+a^2n^2)>0.$$

Cette valeur $c^2 l^2 + a^2 n^2$ sépare les racines p^2, lesquelles ne peuvent dès lors se confondre qu'avec elle, ce qui exige $n^2 = 0$. Ce serait donc une tangente double parallèle à Oz, pour laquelle l'équation se décompose en

$$(p^2 - c^2 l^2)(p^2 - a^2 l^2 - k^2 \nu^2) = 0$$

et n'aura ses racines égales que si

$$a^2 = c^2(1 - k^2\nu^2) \qquad \text{ou} \qquad \nu' = \nu^2,$$

cas qui sera traité à part (§ III), comme nous l'avons déjà annoncé.

En dehors de ce cas, les tangentes à la méridienne sont séparées, deux à deux et avec la même direction, par la tangente à l'ellipse

$$p^2 = c^2 l^2 + a^2 n^2.$$

II. — Cas de décomposition.

L'équation de la méridienne peut encore s'écrire

$$[p^2 - a^2(l^2 + n^2)]^2 + (a^2 - c^2) l^2 [p^2 - a^2(l^2 + n^2)] - k^2\nu^2 p^2 (p^2 - c^2 l^2) = 0$$

Elle se décomposera donc si

$$c^4 k^2 \nu^2 - (c^2 - a^2)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad c^2 - a^2 = \pm c^2 k\nu \qquad \text{ou} \qquad -k\nu' = \pm \nu;$$

nous retrouvons les deux cas fournis par la recherche des tangentes doubles.

L'expression sous le radical s'écrit alors

$$(c^2 - a^2)^2 \left(\frac{l^2}{2} - \frac{p^2}{c^2}\right)^2,$$

et les deux coniques en lesquelles se décompose la méridienne de quatrième classe sont

$$p^2 - a^2(l^2 + n^2) = \frac{c^2 - a^2}{2}\left[l^2 \pm \left(l^2 - 2\frac{p^2}{c^2}\right)\right],$$

c'est-à-dire, pour l'une,

$$\left(2 - \frac{a^2}{c^2}\right) p^2 - c^2 l^2 - a^2 n^2 = 0 \text{ (ellipse)}, \qquad \alpha^2 l^2 + \gamma^2 n^2 - 1 = 0,$$

et, pour l'autre,

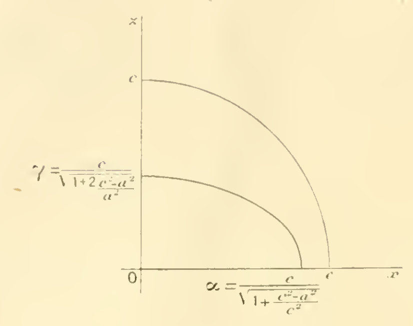
$$p^2 - c^2(l^2 + n^2) = 0 \qquad \text{(cercle de rayon } c\text{)}.$$

Pour l'ellipse,

$$\alpha^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{c^2 - a^2}{c^2}} \qquad (\alpha^2 < c^2 \text{ si } \nu' < 0,\ c^2 - a^2 > 0;\ \alpha^2 > c^2 \text{ si } \nu' > 0,\ c^2 - a^2 < 0).$$

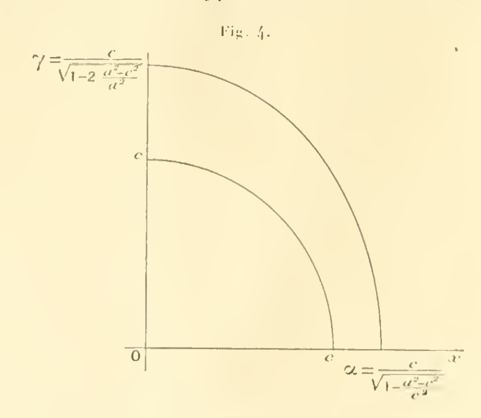
$$\gamma^2 = c^2 - \frac{2(c^2 - a^2)}{1 + \frac{c^2 - a^2}{c^2}} \qquad (\gamma^2 < c^2 \text{ si } \nu' < 0,\ c^2 - a^2 > 0;\ \gamma^2 > c^2 \text{ si } \nu' > 0,\ c^2 - a^2 < 0).$$

Fig. 3.



On ne pourrait, dans cette hypothèse, avoir $\nu' = 0$ sans avoir $\nu = 0$,

Fig. 4.



et les deux se réduiraient à un même cercle de rayon a.

Représentons ces résultats, en exagérant les écarts entre les axes de l'ellipse, et remarquant que $\frac{1}{c^2} < \frac{2}{a^2}$ puisque $\frac{a^2}{c^2} < 2$ (*fig.* 3 et 4).

Les tangentes doubles seront alors données par la racine double $\frac{p^2 - a^2 n^2}{p^2}$ de l'équation, où

$$k^2 \nu^2 = \frac{(c^2 - a^2)^2}{c^4}, \qquad \left(n^2 + \frac{p^2}{c^2}\right)^2 = 0.$$

Les tangentes doubles sont imaginaires, ce qui constitue la vérification annoncée.

Comme autre vérification, dans le cas de décomposition

$$c^2 - a^2 = \pm c^2 k \nu, \qquad -k\nu' = \pm \nu,$$

les sommets sur Ox ont bien pour abscisses c et

$$\frac{a}{\sqrt{1 - k^2 \nu}} = \frac{c}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}} = \alpha,$$

et les sommets sur Oz ont bien pour cotes

$$\frac{a}{\sqrt{1 \mp \frac{c^2 - a^2}{c^2}}},$$

c'est-à-dire, pour le signe $-$,

$$\frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2}}} = c$$

et, pour le signe $+$,

$$\frac{a}{\sqrt{2 - \frac{a^2}{c^2}}} = \gamma.$$

III. — Variation de forme à partir de ces cas.

Faisons maintenant varier $a^2 - c^2$ ou ν' à partir de la valeur qui a fourni la décomposition.

Les deux branches de la méridienne se déformeront, à partir du

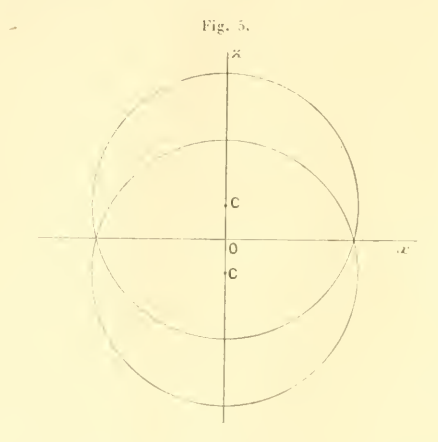
cercle et de l'ellipse, en présentant d'abord des formes analogues à celle de la figure.

Le cas où $a^2 - c^2$ (ou ν') croîtrait en valeur absolue a moins d'intérêt physique, car déjà, pour la décomposition, nous avions $k\nu' = \pm \nu$, et, comme nous l'avons dit, ν' doit être le plus souvent considéré comme inférieur à ν, et même d'un ordre plus élevé. Suivons donc la variation du côté où ν' décroît en valeur absolue.

Cas $\nu' = 0$. — Comme cas limite, pour $\nu' = 0$, $c = a$, nous aurions comme sommets, sur Ox, a et $\frac{a}{\sqrt{1 - k^2\nu^2}} > a$ et, sur Oz, $\frac{a}{\sqrt{1 \mp k\nu}}$ de part et d'autre de a.

Dans ce cas l'équation de la méridienne, ordonnée en $p^2 - a^2 l^2$,

Fig. 5.



donne, si l'on développe le radical par rapport aux puissances de ν,

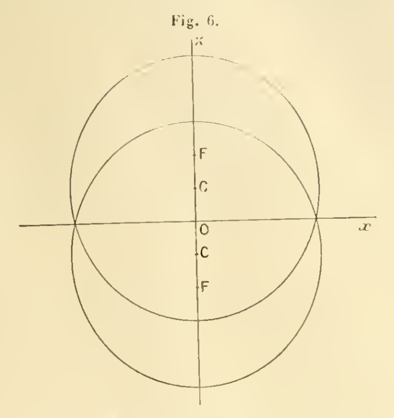
$$a^2(l^2 + n^2) = p^2 \mp k\nu anp - \frac{k^2\nu^2}{2} p^2 + \ldots \qquad (3^e \text{ ordre}).$$

Si l'on néglige le second ordre, on obtient (*fig.* 5)

$$a^2(l^2 + n^2) = \left(p \mp a\frac{k\nu n}{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire deux cercles, méridiens *des deux sphères obtenues préci-*

Fig. 6.



sément dans ce cas par M. Boussinesq (¹).

Fig. 7.

Si l'on ne néglige que le troisième ordre, on obtient (*fig.* 6)

$$a^2(l^2+n^2)=p\left[p\left(1-\frac{k^2\nu^2}{2}\right)\mp k\nu an\right],$$

(¹) T. II, p. 479, note.

c'est-à-dire deux ellipses ayant un foyer commun à l'origine, et les deux autres foyers réels respectifs aux points $\pm \dfrac{ak\nu}{1-k^2\dfrac{\nu^2}{2}}$.

Il est très remarquable que la singularité (points doubles et tangentes doubles) de ces deux méridiennes approchées disparaisse dans l'équation complète, où, comme nous venons de le dire, les deux tangentes parallèles à Oz ont deux points de contact distincts a et $\dfrac{a}{\sqrt{1-k^2\nu^2}}$, que nous avons représentés en exagérant beaucoup l'écart $k\nu$ (*fig.* 7).

Cas $\nu' \neq 0$. — Les deux sommets sur Ox ont pour abscisses c et

$$\frac{a}{\sqrt{1-k^2\nu^2}} = \frac{c\sqrt{1+\nu' k^2}}{\sqrt{1-k^2\nu^2}}.$$

Donc, pour ν' négatif, on aura l'hypothèse remarquable

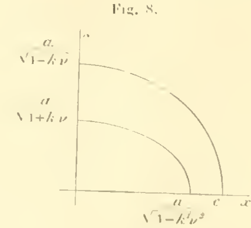
$$a^2 = c^2(1-\nu^2k^2), \qquad c^2-a^2 = c^2\nu^2k^2 \qquad (\nu' = -\nu^2),$$

pour laquelle ces deux sommets coïncideront.

Supposons que ν', négatif, diminue en valeur absolue à partir du cas de décomposition $-k\nu' = \nu$.

Les deux branches partent d'une forme voisine de l'ensemble (cercle, ellipse).

Fig. 8.



Au moment où les deux sommets sur Ox viennent coïncider avec l'abscisse c, c'est-à-dire où (*fig.* 9)

$$a^2 = c^2(1+\nu' k^2) = c^2(1-\nu^2k^2) \qquad (\nu' = -\nu^2),$$

les deux autres sommets, sur Oz, sont ($\nu > 0$ pour fixer les idées)

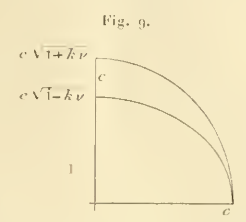
$$\frac{a}{\sqrt{1-k\nu}} = \frac{c\sqrt{1-\nu^2 k^2}}{\sqrt{1-k\nu}} = c\sqrt{1+k\nu}.$$

et

$$\frac{a}{\sqrt{1+k\nu}} = \frac{c\sqrt{1-\nu^2 k^2}}{\sqrt{1+k\nu}} = c\sqrt{1-k\nu}.$$

Mais si ν', continuant à décroître en valeur absolue, descend au-

Fig. 9.



dessous de ν^2, le sommet sur Ox dépasse c et la forme générale redevient la même.

Faisons

$$a^2 = c^2(1 - k^2\nu^2),$$

dans l'équation aux tangentes doubles

$$k^4c^4\nu^4(p^2 - a^2n^2)^2$$
$$- 2k^2\nu^2(a^2+c^2)c^2p^2(p^2 - a^2n^2) + c^4k^4\nu^4p^4 + 4k^2\nu^2a^2c^2p^4 = 0$$

doit avoir pour racine double

$$\frac{p}{l} = c, \qquad n = 0.$$

En d'autres termes, c'est l'équation précédente qui doit avoir racine double $n = 0$, $\frac{p}{l} = c$.

Or elle est alors

$$(p^2 - a^2l^2)(p^2 - c^2l^2) - k^2\nu^2p^2(p^2 - c^2l^2) = 0.$$

et $(p^2 - c^2l^2)^2(1 - k^2\nu^2) = 0$ ou a bien une racine double $p^2 = c^2l^2$.

Mais alors aussi l'équation suivante (17) donne, en effet,

$$2k^2c^2\nu^2 + 2(a^2 - c^2) = 0.$$

C'est le cas où $f(1) = 0$ donne la solution $n = 0$, d'où

$$(p^2 - c^2 l^2)^2 = 0.$$

Mais c'est un cas limite, affleuré, après lequel il y a retrait en sens contraire.

Comme vérification de ce résultat capital, je vais prendre l'hypothèse

$$\nu' = -\theta\nu^2, \qquad 0 < \theta < 1,$$
$$c^2 - a^2 = -\nu' c^2 k^2 = \theta c^2 \nu^2 k^2, \qquad a^2 = c^2 - \theta c^2 \nu^2 k^2,$$

La demi-somme est

$$\frac{2 - \theta\nu^2 k^2}{\theta^2\nu^2 k^2} = \frac{2}{\theta^2\nu^2 k^2} - 1 > 1, \qquad \text{si } \nu \text{ est petit.}$$

Donc les deux racines sont > 1 et ne conviennent pas.

Écart des deux nappes de la surface, ou des deux arcs de la méridienne. — Il est intéressant, au point de vue optique, de se rendre compte de l'ordre de grandeur de cet écart. Il suffit, dans $lx + nz = p$, de considérer l et n comme $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; p est alors la distance de la tangente à l'origine, et l'écart dépend de la différence des valeurs absolues des racines p de l'équation

$$(p^2 - a^2)(p - c^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha) - k^2\nu^2 p^2 (p^2 - c^2\cos^2\alpha) = 0.$$

A cette évaluation nous substituerons la recherche équivalente de l'ordre de grandeur de $p^2 - a^2$, qui mesure l'écart de la nappe et de la sphère de rayon a, d'où l'écart des deux nappes entre elles.

La somme des racines $p^2 - a^2$ est de l'ordre de ν' et de ν^2, le produit de l'ordre de ν^2.

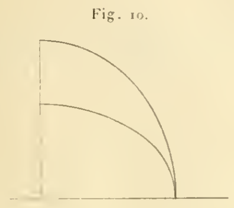
Sous le radical, il vient

$$(a^2 - c^2 + c^2 k^2 \nu^2)^2 \cos^2\alpha + 4a^2 k^2 \nu^2 \sin^2\alpha.$$

Ceci est une vérification de plus de l'absence de tangentes doubles

dans tous les cas possibles, avec le seul cas d'exception que nous avons rencontré.

Fig. 10.



Les racines sont donc de l'ordre de ν' et de ν^2.

La discussion que nous venons de faire de la méridienne de notre surface d'ondes, de révolution dans cette première Partie, fournit une réponse négative à la question suivante, qu'il serait naturel de se poser dans cette Partie et dans les deux autres :

La surface de Fresnel se déduisant de l'ellipsoïde par la transformation apsidale, d'ailleurs réciproque, quelle serait l'apsidale de notre surface par rapport à son centre?

On voit facilement, en effet, que, pour une surface de révolution, et par rapport à un point de son axe, l'apsidale de révolution s'obtient en faisant tourner la méridienne d'un angle $\frac{\pi}{2}$ autour du point dans son plan.

Nous obtiendrons donc ici une surface de révolution assez compliquée, au lieu de l'ellipsoïde de Fresnel, et, par induction, dans les cas plus compliqués encore des deuxième et troisième Parties, *on ne peut espérer obtenir une surface apsidale simple correspondant à la nôtre.*

DEUXIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Reprenons les équations de la première Partie, en y remplaçant $\frac{1}{a^2}$ par $\frac{1}{b^2}$ dans la seconde et par $\frac{1}{c^2}$ dans la troisième, ce qui donne

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\Delta_1 \mathfrak{f}\eta = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \dfrac{1}{b^2}\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \dfrac{d}{dt}\Delta_2 \mathfrak{f}\xi = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} \qquad\qquad\qquad = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Une première approximation, basée sur la petitesse de $\mathfrak{f}$, de $b - a$ et de $c - a$, donne $\theta = 0$ et, par suite,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta_2\xi, \qquad \frac{1}{b^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Delta_2\eta, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\zeta,$$

avec

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\xi, \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -k^2\eta, \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -k^2\zeta,$$

d'où

$$\Delta_2\xi = -\frac{k^2}{a^2}\xi, \qquad \Delta_2\eta = -\frac{k^2}{b^2}\eta, \qquad \Delta_2\zeta = -\frac{k^2}{c^2}\zeta.$$

Cette hypothèse approchée, $\theta = 0$, implique qu'on négligera plus loin les produits de ν et des différences telles que $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$.

Les équations (18) deviennent alors, en posant $\mathfrak{f} = \nu$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{k^2}{b^2}\nu\frac{d\eta}{dt} &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{b^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{k^2}{a^2}\nu\frac{d\xi}{dt} &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{c^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} \qquad\qquad &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{aligned}$$

Mais on n'altérera les résultats que d'erreurs du second ordre, également négligeables, comme celles du calcul précédent, et l'on donnera aux formules toute la symétrie possible, en remplaçant $\frac{\nu}{a^2}$ et $\frac{\nu}{b^2}$ par $\frac{\nu}{c^2}$, ce qui revient à négliger les produits $\nu\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)$ et $\nu\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)$. Les équations prendront alors la forme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{k^2}{c^2}\nu\frac{d\eta}{dt} &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx},\\
\frac{1}{b^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{k^2}{c^2}\nu\frac{d\xi}{dt} &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy},\\
\frac{1}{c^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} \qquad\qquad &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}.
\end{aligned}$$

Nous cherchons encore des solutions de la forme

$$(5) \qquad \frac{\xi}{L} = \frac{\eta}{M} = \frac{\zeta}{N} = e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}},$$

dont les parties réelles fourniront la solution physique.

Leur substitution dans nos équations donne

$$(19) \qquad \begin{cases}
\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2}+l^2\right)L + \left(lm+\frac{k\nu}{c^2}\sqrt{-1}\right)M + nl\,N = 0,\\
\left(lm-\frac{k\nu}{c^2}\sqrt{-1}\right)L + \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\omega^2}+m^2\right)M + mn\,N = 0,\\
\qquad nl\,L + mn\,M + \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\omega^2}+n^2\right)N = 0.
\end{cases}$$

Ici la symétrie autour de l'axe Oz a disparu avec $b \neq a$, nous ne pouvons donc plus supposer $m=0$, et le *problème ne se réduit plus à deux dimensions.*

La condition de compatibilité de ces trois équations homogènes sera ici

$$(20) \qquad \begin{vmatrix}
\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\omega^2}+l^2 & lm+\frac{k\nu}{c^2}\sqrt{-1} & nl\\
lm-\frac{k\nu}{c^2}\sqrt{-1} & \frac{1}{b^2}-\frac{1}{\omega^2}+m^2 & mn\\
nl & mn & \frac{1}{c^2}-\frac{1}{\omega^2}+n^2
\end{vmatrix} = 0.$$

à laquelle nous donnerons encore les deux formes (21) et (22) :

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\omega^2} & \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2} + \dfrac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \dfrac{\gamma\alpha}{\omega^2} \\ \dfrac{\alpha\beta}{\omega^2} - \dfrac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{\gamma^2+\alpha^2}{\omega^2} & \dfrac{\beta\gamma}{\omega^2} \\ \dfrac{\gamma\alpha}{\omega^2} & \dfrac{\beta\gamma}{\omega^2} & \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0,$$

à cause de

$$\frac{l}{\alpha} = \frac{m}{\beta} = \frac{n}{\gamma} = \frac{1}{\omega} \qquad \text{et} \qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1.$$

(C'est l'équation aux vitesses ω de propagation des deux systèmes d'ondes planes normales à la direction de cosinus α, β, γ.)

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a^2} - (m^2+n^2) & lm + \dfrac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & nl \\ lm - \dfrac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2} & \dfrac{1}{b^2} - (n^2+l^2) & mn \\ nl & mn & \dfrac{1}{c^2} - (m^2+n^2) \end{vmatrix} = 0,$$

à cause de

$$l^2+m^2+n^2 = \frac{1}{\omega^2}.$$

(C'est l'équation tangentielle de la surface des ondes, qui n'est plus ici de révolution, et à laquelle doivent être tangents les plans

$$lx + my + nz = 1$$

de ces ondes.)

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES ω DE PROPAGATION.

Cette équation (21) peut s'écrire, le coefficient de $\frac{1}{\omega^6}$ étant identiquement nul,

$$(23)\qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\frac{1}{\omega^4} - \left[\frac{\beta^2+\gamma^2}{b^2c^2}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{c^2a^2} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2b^2} - \frac{k^2\nu^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^4}\right]\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2b^2}-\frac{k^2\nu^2}{c^4}\right) = 0.$$

La condition de réalité, où l'on fera jouer à c un rôle à part comme dans tout ce qui précède, sera alors

$$\frac{1}{c^4}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left[\frac{\alpha^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{\beta^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]$$
$$+\left[\frac{\alpha^2}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]^2$$
$$-\frac{4}{a^2b^2c^2}\left[\alpha^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\right]+k^2\nu^2[\ldots]\geqq 0.$$

Elle ne contient donc plus que ν et les différences $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$, $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$.

Ces différences ne peuvent donc pas être quelconques par rapport au coefficient ν de dissymétrie.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

La condition de compatibilité (20) étant supposée remplie, les équations homogènes (19) fournissent pour L, M, N un système de valeurs proportionnelles. Écrivons ces équations (19) avec $\frac{l}{\alpha}=\frac{m}{\beta}=\frac{n}{\gamma}=\frac{1}{\omega}$:

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1-\alpha^2}{\omega^2}\right)\mathrm{L}-\left(\frac{\alpha\beta}{\omega^2}+\frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2}\right)\mathrm{M}+\frac{\gamma\alpha}{\omega^2}\mathrm{N}=0,\\&\left(\alpha\frac{\beta}{\omega^2}-k\nu\frac{\sqrt{-1}}{c^2}\right)\mathrm{L}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1-\beta^2}{\omega^2}\right)\mathrm{M}+\frac{\beta\gamma}{\omega^2}\mathrm{N}=0,\\&\frac{\gamma\alpha}{\omega^2}\mathrm{L}+\frac{\beta\gamma}{\omega^2}\mathrm{M}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1-\gamma^2}{\omega^2}\right)\mathrm{N}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions-les par α, β, γ. $\frac{1}{\omega^2}$ disparaît, et il reste

$$\frac{\alpha\mathrm{L}}{a^2}+\frac{\beta\mathrm{M}}{b^2}+\frac{\gamma\mathrm{N}}{c^2}=\frac{k\nu\sqrt{-1}}{c^2}(\beta\mathrm{L}-\alpha\mathrm{M}),$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\alpha\mathrm{L}+\beta\mathrm{M}+\gamma\mathrm{N}}{a^2}=\beta\mathrm{M}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\gamma\mathrm{N}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{k\nu}{c^2}\sqrt{-1}(\beta\mathrm{L}-\alpha\mathrm{M}).$$

C'est la généralisation exacte de la première Partie, et, ce qui est très remarquable, les différences $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ et $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}$, restant petites dans les cas de l'expérience, *il y aura encore quasi-transversalité des vibrations*, qui se feront à très peu près dans le plan de l'onde.

Les valeurs proportionnelles à L, M, N, prises pour la symétrie dans les deux premières équations, et divisées par

$$\frac{\gamma}{\omega^2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

seront

$$\mathrm{L} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{k\nu\beta\sqrt{-1}}{c^2\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = \mathrm{L}' + \mathrm{L}''\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{M} = \frac{\beta}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}} - \frac{k\nu\alpha\sqrt{-1}}{c^2\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = \mathrm{M}' + \mathrm{M}''\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{N} = \frac{\omega^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha^2}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{\beta^2}{\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}}\right) - \frac{k^2\nu^2\omega^2}{c^4\gamma\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}\right)},$$

où L'' et M'' sont de l'ordre de petitesse de ν.

Alors, en posant

$$\theta = k\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\omega}\right)\sqrt{-1},$$

et désignant par $\mathcal{R}u$ la partie réelle de l'imaginaire u,

$$\begin{aligned}
\xi &= \mathcal{R}(\mathrm{L}' + \mathrm{L}''\sqrt{-1})(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{L}'\cos\theta - \mathrm{L}''\sin\theta,\\
\eta &= \mathcal{R}(\mathrm{M}' + \mathrm{M}''\sqrt{-1})(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{M}'\cos\theta - \mathrm{M}''\sin\theta,\\
\zeta &= \mathcal{R}\quad \mathrm{N}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \mathrm{N}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ici les ellipses trajectoires sont l'intersection du plan de l'onde avec le cylindre plus compliqué obtenu par l'élimination de θ entre les deux premières

$$(25)\qquad (\mathrm{M}''\xi - \mathrm{L}''\eta)^2 + (\mathrm{M}'\xi - \mathrm{L}'\eta)^2 = (\mathrm{L}'\mathrm{M}'' - \mathrm{M}'\mathrm{L}'')^2.$$

Dans ces diverses expressions, ω doit, bien entendu, recevoir les deux valeurs racines de l'équation en ω des vitesses.

D'autres conséquences physiques résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

I. — Propriétés générales.

L'équation tangentielle (22) de la surface des ondes, développée et rendue homogène comme celle du plan de l'onde $lx + my + nz = p$, devient

$$(26)\quad p^4 - p^2[a^2(m^2+n^2) + b^2(n^2+l^2) + c^2(l^2+m^2)] + (l^2+m^2+n^2)(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2) - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2p^2[p^2 - c^2(l^2+m^2)] = 0$$

ou

$$F - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2p^2C = 0.$$

$F = 0$ étant l'équation tangentielle de la surface des ondes de Fresnel (¹), et $C = 0$ l'équation tangentielle d'un cercle de centre O et de rayon c dans le plan Oxy.

La surface est inscrite, quel que soit ν, dans la développable circonscrite commune à ce cercle et à la surface F de Fresnel.

Une vérification intéressante consiste en ce que, pour $a = b = c$, elle donne, comme celle de la deuxième Partie,

$$a^2(l^2+m^2+n^2) = p^2 - \frac{k^2\nu^2}{2}p^2 \pm ak\nu np\sqrt{1 + \frac{p^2k\nu}{4a^2n^2}}$$
$$= p^2 - \frac{k^2\nu^2}{2}p^2 \pm ak\nu np\left(1 + \frac{p^2k\nu}{8a^2n^2} + \dots\right)$$
$$= \left(p \pm \frac{ak\nu n}{2}\right)^2 + k^2\nu^2\left(-\frac{p^2}{2} - \frac{a^2n^2}{4} + \frac{p^3}{8a} + \dots\right),$$

ou, en négligeant le second ordre $k^2\nu^2$, l'équation *tangentielle des deux sphères de rayon a et de centres* $\pm a\frac{k\nu}{2}$ *sur* Oz, *obtenues dans cette hypothèse par M. Boussinesq* (²).

(¹) Richard, *Thèse*, p. 9, forme (A′).

(²) II, p. 479, note.

A partir de ce cas limite, $a^2 - c^2$ et $b^2 - c^2$ cessant d'être nuls pour devenir très petits, la surface se déforme, ses deux nappes s'éloignant progressivement de ces deux sphères.

Les distances à l'origine p de leurs plans tangents, si l, m, n sont réduits à être les cosinus directeurs des normales ($l^2 + m^2 + n^2 = 1$), sont les racines de l'équation bicarrée

$$\left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 \nu^2\right) p^4 - \left[a^2(m^2 + n^2) + b^2(n^2 + l^2) + c^2\left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4} k^2 \nu^2\right)(l^2 + m^2)\right] p^2 + (b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2) = 0.$$

Nous poserons

$$(27) \qquad \begin{cases} a^2 - c^2 = \nu' k^2 c^2, \\ b^2 - c^2 = \nu'' k^2 c^2, \end{cases}$$

en introduisant les coefficients très petits ν' et ν'', analogues au coefficient ν' de la première Partie.

L'écart des deux plans tangents dépend de l'expression sous le radical, laquelle, avec ces notations, devient, au facteur $c^4 k^2$ près,

$$\frac{a^2 b^2}{c^4} n^2 \nu^2 - k^2 n^2 \nu' \nu'' + \frac{k^2}{4}\left[\nu'(m^2 + n^2) + \nu''(n^2 + l^2) + \nu^2(l^2 + m^2)\frac{a^2 b^2}{c^4}\right]^2 + k^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} \nu^2 (l^2 \nu'' + m^2 \nu') + k^2 \frac{a^2 b^2}{c^4} n^2 \nu^2 (\nu' + \nu'' + \nu' \nu'' k^2).$$

Tous les termes sont au moins de l'ordre de ν^2 ou de $\nu' \nu''$.

Supposons que, pour une valeur donnée de ν, les autres coefficients ν' et ν'' partent de zéro par valeurs d'ordre infinitésimal décroissant jusqu'à celui de ν^2.

Le premier des termes sous le radical sera prépondérant, et celui-ci ne pourra s'annuler : *il n'y aura pas de plans tangents doubles.*

Supposons ensuite que, la grandeur de ν' et ν'' croissant, ils atteignent l'ordre de ν^2. Tous les termes sont positifs si ν' et ν'' sont positifs, *et il n'y a pas encore de plans tangents doubles réels.*

Il y en aura dans le seul cas où l'un au moins des coefficients ν' et ν'' serait négatif et ils formeront alors, au quatrième ordre près, une déve-

loppable circonscrite à la surface et à la conique

$$\left[\frac{a^2 b^2}{c^4}\nu^2 - k^2\nu'\nu'' + \frac{a^2 b^2}{c^4}k^2\nu^2(\nu'+\nu'')\right]n^2 + \frac{a^2 b^2}{c^4}\nu^2(\nu'' l^2 + \nu' m^2) = 0$$

du plan de l'infini.

Étudions au contraire cette surface en y supposant a, b, c fixes et ν variable. Nous pourrons même, vu l'intérêt géométrique de la question, ne pas supposer très petits $a^2 - c^2$, $b^2 - c^2$, ν.

Nous remarquons d'abord que l'échange de a et b (ν' et ν'') revient à échanger l et m, c'est-à-dire Ox et Oy. Nous pourrons donc toujours supposer $a > b$ par exemple.

C'est ce que nous ferons dans les paragraphes suivants.

II. — Développables circonscrites simples.

L'équation tangentielle (26) de la surface peut s'écrire

$$[p^2 - c^2(l^2 + m^2)]\left[p^2\left(1 - \frac{a^2 b^2}{c^4}k^2\nu^2\right) - (a^2 m^2 + b^2 l^2)\right]$$
$$+ n^2[b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)n^2 + a^2 b^2 m^2 - (a^2 + b^2)p^2] = 0.$$

La surface est donc inscrite dans les quatre développables

$$(D_1)\quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ n = 0; \end{cases}$$

$$(D_2)\quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = 0, \\ b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2 = 0; \end{cases}$$

$$(D_3)\quad \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2\left(1 - \dfrac{a^2 b^2}{c^4}k^2\nu^2\right) = 0, \\ n = 0; \end{cases}$$

$$(D_4)\quad \begin{cases} b^2 l^2 + a^2 m^2 - p^2\left(1 - \dfrac{a^2 b^2}{c^4}k^2\nu^2\right) = 0, \\ b^2(c^2 + a^2)l^2 + a^2(b^2 + c^2)m^2 + a^2 b^2 n^2 - (a^2 + b^2)p^2 = 0, \end{cases}$$

dont les deux premières (D_1) et (D_2) sont indépendantes de ν.

(D_1) est un cylindre de révolution ayant pour trace sur Oxy le cercle de centre O et de rayon c.

(D_3) est un cylindre elliptique de même direction ayant pour trace

sur Oxy l'ellipse de demi-axes $\dfrac{b}{\sqrt{1-k^2\nu^2\dfrac{a^2b^2}{c^4}}}$ sur Ox et $\dfrac{a}{\sqrt{1-k^2\nu^2\dfrac{a^2b^2}{c^4}}}$ sur Oy.

Ces deux cylindres, l'un fixe et l'autre dépendant de ν, constituent le contour apparent de la surface sur ce plan, et par suite leurs traces en constituent les sections, sous réserve de singularités d'ordre supérieur.

Il est intéressant d'examiner dans quelles conditions ils se coupent réellement, la nature de cette intersection étant visiblement liée, quoique de façon plus ou moins complexe, à celle des singularités de la surface. Or, la réalité de cette intersection exige que le rayon du cercle soit compris entre les demi-axes de l'ellipse, c'est-à-dire, d'après l'hypothèse reconnue suffisante $a^2 > b^2$,

$$\frac{b^2}{1-k^2\nu^2\dfrac{a^2b^2}{c^4}} < c^2 < \frac{a^2}{1-k^2\nu^2\dfrac{a^2b^2}{c^4}},$$

$$b^2-c^2 < -\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2 < a^2-c^2,$$

$$\nu'' < -\frac{a^2b^2}{c^4}\nu^2 < \nu'.$$

On voit, *comme conséquence très remarquable, que l'un au moins des deux coefficients*, ν'', *celui qui correspond au plus petit axe b, doit être négatif*, et que le second peut l'être aussi.

Ceci concorde avec le résultat obtenu ci-dessus par l'étude du radical et peut, *soit inspirer un choix de vérifications expérimentales, soit, du sens de ces vérifications, faire conclure au signe de ν' et ν'' pour la précision des résultats des Chapitres précédents.*

(D_2) peut être représentée par

$$c^2(l^2+m^2)-p^2=0$$

avec

$$a^2(b^2-c^2)l^2+b^2(a^2-c^2)m^2+a^2b^2n^2=0,$$

conique du plan de l'infini resserrée autour de Oz quand a^2-c^2 et b^2-c^2 tendent vers zéro.

(D_1) peut de même être représentée par

$$b^2l^2+a^2m^2-p^2\left(1-k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}\right)=0$$

avec

$$b^2(c^2-b^2)l^2+a^2(c^2-a^2)m^2+a^2b^2n^2-(a^2+b^2)\frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2p^2=0.$$

(D_2) et (D_4) peuvent être représentées, sous forme paramétrique, par

$$(D_2)\qquad l=\frac{p}{c}\cos\theta,\qquad m=\frac{p}{c}\sin\theta;$$

$$(D_4)\qquad bl=p\cos\theta\sqrt{1-k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}},\qquad am=p\sin\theta\sqrt{1-k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}};$$

d'où la seconde équation déduit $\frac{n}{p}$ en θ.

Achevons le calcul pour (D_2), la plus simple, et indépendante de ν :

$$\frac{n^2}{p^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\cos^2\theta+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\sin^2\theta.$$

Nous savons qu'on peut supposer $a>b$.

Alors : si $c^2>a^2>b^2$, $\frac{n}{p}$ est réel quel que soit θ ; si $a^2>c^2>b^2$, il y a pour θ des limites données par

$$\operatorname{tang}\theta=\pm\sqrt{-\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}}=\pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

et annulant n; si $a^2>b^2>c^2$, la développable est tout entière imaginaire.

On peut rapprocher ces résultats de ceux que nous a donnés le rapprochement de (D_1) et (D_3) pour la forme de la surface.

L'arète de rebroussement de la développable s'obtient sans peine sous forme paramétrique. Le plan tangent est en effet

$$(a)\qquad ab(x\cos\theta+y\sin\theta)+ckz\sqrt{-\nu''a^2\cos^2\theta-\nu'b^2\sin^2\theta}-abc=0,$$

équation à laquelle il suffit d'adjoindre ses deux dérivées par rapport à θ :

$$(b)\qquad ab(-x\sin\theta+y\cos\theta)+ckz\frac{(\nu''a^2-\nu'b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{-\nu''a^2\cos^2\theta-\nu'b^2\sin^2\theta}},$$

$$(c)\qquad ab(-x\cos\theta-y\sin\theta)$$
$$+ckz(\nu''a^2-\nu'b^2)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{-\nu''a^2\cos^2\theta-\nu'b^2\sin^2\theta}}\right)=0;$$

d'où

$$ckz\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}+(\nu'' a^2-\nu' b^2)\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}}\right)=abc,$$

$$abx=abc\cos\theta-ckz\cos\theta\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}+ckz\frac{(\nu'' a^2-\nu' b^2)\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}},$$

$$aby=abc\sin\theta-ckz\sin\theta\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}-ckz\frac{(\nu'' a^2-\nu' b^2)\sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{-\nu'' a^2\cos^2\theta-\nu' b^2\sin^2\theta}}.$$

Les équations tangentielles des traces de la développable sur Oxz et Oyz s'obtiennent par l'élimination respective de m et de l entre les équations (D_2) :

$$(D_2)_1 \qquad (b^2-a^2)c^4l^2+a^2b^2c^2n^2+b^2(a^2-c^2)p^2=0,$$

et de même, par échange de a et b,

$$(D_2)_2 \qquad (a^2-b^2)c^4m^2+a^2b^2c^2n^2+a^2(b^2-c^2)p^2=0.$$

On voit que le genre et l'espèce de ces coniques dépendent encore des signes des mêmes différences.

Il faut toutefois remarquer que par une telle conique réelle peut passer une développable imaginaire, comme par une courbe imaginaire, dualistique de la développable, peut passer un cône réel.

Cela dit, les trois cas auxquels nous venons d'être conduits donneront :

$c^2>a^2>b^2$,	$(D_2)_1$	—	+	—	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	—	ellipse réelle;
$a^2>c^2>b^2$,	$(D_2)_1$	—	+	+	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	—	ellipse réelle;
$a^2>b^2>c^2$.	$(D_2)_1$	—	+	+	hyperbole,
	$(D_2)_2$	+	+	+	ellipse imaginaire.

Le contour apparent de la surface sur le plan $y=0$ est de même nature que pour la surface de notre première Partie, dont il n'y aurait qu'à reprendre les résultats.

III. — Ellipsoïde de référence.

L'équation (26) de notre surface, résolue par rapport à p^2, donne

$$(28) \quad 2p^2\left(1-\frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2\right)$$
$$=a^2(m^2+n^2)+b^2(n^2+l^2)+\left(c^2-\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right)(l^2-m^2)\pm\sqrt{\ldots},$$

c'est-à-dire l'équation d'un ellipsoïde

$$(29)\quad 2p^2\left(1-\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right) = \left(b^2+c^2-\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right)l^2+\left(c^2+a^2-\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right)m^2+(a^2+b^2)n^2,$$

à partir duquel (comme plans tangents) les plans tangents à notre surface sont déterminés par $\pm$ le radical portant sur

$$\left[a^2(m^2+n^2)+b^2(n^2+l^2)+c^2(l^2+m^2)-\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2(l^2+m^2)\right]^2 - 4\left(1-\frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2\right)(l^2+m^2+n^2)(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2).$$

Mais les termes indépendants de ν, transformés par l'identité de Lagrange

$$(l^2+m^2+n^2)(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2) \equiv (bcl^2+cam^2+abn^2)^2+\Sigma(c-b)^2a^2m^2n^2,$$

contiennent tous $(b-c)^2$, ou $(c-a)^2$, ou $(a-b)^2$.

Le radical est donc de l'ordre de la plus grande des ν, $b-c$, $c-a$, $a-b$, et les plans tangents à notre surface s'écartent des plans tangents à l'ellipsoïde de quantités de cet ordre.

En faisant $\nu=0$, on trouve pour la surface de Fresnel l'ellipsoïde plus simple

$$2p^2=(b^2+c^2)l^2+(c^2+a^2)m^2+(a^2+b^2)n^2.$$

La même idée pourrait être appliquée à la surface plus générale de la troisième Partie ; nous n'y reviendrons pas.

Le résultat précédent suggère des hypothèses qui pourraient *conduire à des vérifications expérimentales*.

Cet ellipsoïde pourrait en effet être de révolution, non seulement dans le cas $b=a$ de la première Partie, c'est-à-dire autour de Oz, mais dans deux cas nouveaux :

1° Autour de Ox, si

$$\nu''=-\frac{a^2b^2}{c^4}\nu^2;$$

2° Autour de Oy, si

$$\nu'=-\frac{a^2b^2}{c^4}\nu^2.$$

Ce sont, pour les deux coefficients de biréfringence ν' et ν'' de cette deuxième Partie, les hypothèses qu'on a rencontrées pour ν' dans la première.

Ce sont aussi les cas limites de la discussion du paragraphe précédent sur $(D)_1$ et $(D)_3$.

IV. — Quelques plans tangents particuliers.

Le rôle joué dans l'équation de la surface par les trois constantes a, b, c suggère l'idée d'étudier les plans tangents de la forme

$$\text{(I)} \qquad ax + by + cz + \rho^2 = 0,$$

ρ^2 étant positif ou négatif, mais ρ étant une inconnue du degré 1 d'homogénéité, et

$$\text{(II)} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{1}{\sigma} = 0,$$

σ étant une inconnue du degré 0 d'homogénéité.

1° Portons les coordonnées du plan (I) dans l'équation tangentielle, qui devient

$$(30) \quad \left(1 - k^4\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}\right)\rho^8 - \rho^4\left[3(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{c^2}k^4\nu^2\right] + 3a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2) = 0,$$

et formons la partie principale du radical pour

$$(27) \quad \begin{cases} a^2 = c^2(1 + \nu' k^2), \\ b^2 = c^2(1 - \nu'' k^2). \end{cases}$$

Nous obtenons, comme facteur de c^8, en dehors des termes en ν,

$$[(\nu' + \nu'')^2 - 3\nu'\nu'']k^4 + (\nu' - \nu'')\nu'\nu''k^6 + \nu'^2\nu''^2k^8.$$

Ces termes, quand ν' et ν'' partent de zéro, commencent par être négligeables devant le terme en $k^2\nu^2$, qui s'écrit

$$k^4\nu^2a^2b^2c^4(3 - \ldots).$$

De plus, la somme et le produit des racines ρ^4 sont positifs. Les quatre valeurs de ρ^2, et par suite les plans tangents de direction (I), commencent par être réels. Ces plans resteront réels et distincts dans

tous les cas répondant à des phénomènes physiques où ν' et ν'' n'atteindront pas de valeurs comparables à ν.

Il n'y aura donc pas de plans tangents doubles parallèles à cette direction, ce qui est d'accord avec nos résultats généraux.

2° Passons aux plans tangents (II) donnés par

$$(31)\quad \frac{1}{\sigma^4}\left(1 - k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{1+\nu'k^2}{1+\nu''k^2} + 1 + \nu'k^2 + 1 + \nu''k^2 + \frac{1+\nu''k^2}{1+\nu'k^2} + \frac{1}{1+\nu'k^2} + \frac{1}{1+\nu''k^2} - \frac{k^2\nu^2a^2b^2}{c^4}\left(\frac{1}{1+\nu'k^2} + \frac{1}{1+\nu''k^2}\right)\right] + \left[\frac{1+\nu''k^2}{1+\nu'k^2} + \frac{1+\nu'k^2}{1+\nu''k^2} + (1+\nu'k^2)(1+\nu''k^2)\right] \times \left[3 - \frac{a^2b^2k^2}{c^2}\left(\frac{\nu'}{a^2} + \frac{\nu''}{b^2}\right)\right] = 0.$$

Si l'on considère ν' et ν'' comme au moins du premier ordre, on voit que, dans le coefficient de $\frac{1}{\sigma^2}$, les parties du premier ordre se détruisent et que ce coefficient se réduit à -6 au second ordre près.

Le terme indépendant de $\frac{1}{\sigma^2}$ se réduit de même à $+9$, et l'équation

$$\frac{1}{\sigma^4} - \frac{6}{\sigma^2} + 9 = 0$$

admet comme racines doubles $\pm\sqrt{3}$, ce qui est prévu, car, pour $b = c = a$, l'on doit bien avoir

$$\frac{x+y+z}{a} \mp \sqrt{3} = 0$$

pour vérifier l'équation tangentielle de la sphère

$$a^2(l^2 + m^2 + n^2) = p^2 \qquad \text{avec} \qquad l = m = n.$$

C'est donc de

$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt{3}$$

que les solutions de l'équation complète diffèrent peu.

On peut évaluer, par un calcul assez laborieux, l'ordre de cette différence.

Si ν' et ν'' sont d'ordre supérieur à ν, on peut réduire les racines à

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{3 - k^2\nu^2 \pm k\nu\sqrt{3}}{1 - k^2\nu^2}.$$

Si ν' et ν'' sont de l'ordre de ν, ces coefficients modifieront simplement le terme en ν au numérateur sans en changer l'ordre.

V. — Plans tangents singuliers.

Recherchons les singularités tangentielles réelles de la surface en essayant d'annuler les dérivées partielles du premier membre de $\varphi = 0$ (26) :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l} = l\Big[-(b^2+c^2)p^2 + b^2c^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2p^2\Big],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = m\Big[-(c^2+a^2)p^2 + c^2a^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2p^2\Big],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = n\big[-(a^2+b^2)p^2 + a^2b^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2\big],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 2p^3 - p\big[a^2(m^2+n^2) + b^2(n^2+l^2) + c^2(l^2+m^2)\big] - 2\frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^4p^3 + \frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2p^2(l^2+m^2).$$

Les plans tangents par l'origine ($p = 0$) sont imaginaires, comme le montre $\varphi = 0$. Ils donnent d'ailleurs

$$l\big[b^2c^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2\big] = 0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial l} = 0,$$

$$m\big[c^2a^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2\big] = 0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial m} = 0,$$

$$n\big[a^2b^2(l^2+m^2+n^2) + b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2\big] = 0 \qquad \text{pour} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0,$$

$$(l^2+m^2+n^2)(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 0.$$

1° Si $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, ce sont des plans tangents isotropes par l'origine :

a. S'ils vérifient en même temps $b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2=0$, ils sont bien plans tangents doubles, et déterminés par les valeurs

$$\frac{l^2}{a^2(b^2-c^2)}=\frac{m^2}{b^2(c^2-a^2)}=\frac{n^2}{c^2(a^2-b^2)};$$

b. S'ils ne vérifient pas $b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2=0$, ils devraient vérifier $l=m=n=0$.

2° Si $b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2=0$, ils doivent de même vérifier $l^2+m^2+n^2=0$, ce sont les précédents.

Cherchons donc des plans tangents $p\neq 0$.

Si nous supposons aussi $n\neq 0$, la condition $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ donne à $\frac{\partial\varphi}{\partial l}=0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial m}=0$ la forme

$$0=(c^2-a^2)\,l\,[-p^2+b^2(l^2+m^2+n^2)],$$
$$0=(c^2-b^2)\,m\,[-p^2+a^2(l^2+m^2+n^2)].$$

Il n'y a pas à essayer d'annuler les deux crochets, ce qui, à cause de $a\neq b$, exige $l^2+m^2+n^2=0$ (plans tangents isotropes déjà étudiés).

Essayons d'abord $l=m=0$, ce qui, dans $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, donne

$$\frac{1}{2n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}=2a^2b^2n^2-(a^2+b^2)p^2=0,$$
$$\varphi=\frac{-p^4}{4a^2b^2}\left[(a^2-b^2)^2+4k^2\frac{a^4b^4\nu^2}{c^4}\right]$$

et ne s'annulerait que pour une surface particulière, d'ailleurs imaginaire,

$$a^2-b^2=2k\frac{a^2b^2\nu}{c^2}\sqrt{-1}.$$

Annuler l dans l'un et le crochet dans l'autre, ou annuler le crochet dans l'un et m dans l'autre, cela constitue deux cas symétriques, dont il suffit d'examiner le premier.

Alors

$$\frac{1}{2n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-(a^2+b^2)p^2+a^2b^2(m^2+n^2)+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2+\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2p^2$$
$$=a^2m^2\left(c^2-a^2+\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right)+a^2n^2\left(b^2-a^2+\frac{a^2b^2}{c^2}k^2\nu^2\right)$$

et

$$\varphi = p^4 - p^2[(a^2 + c^2)m^2 + (a^2 + b^2)n^2]$$
$$+ a^2(c^2m^2 + b^2n^2)(m^2 + n^2) - \frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2p^2(p^2 - c^2m^2) = 0$$
$$= a^2(m^2 + n^2)\frac{a^2b^2}{c^4}k^2\nu^2[(c^2 - a^2)m^2 - a^2n^2].$$

$n^2 = -m^2$ donne dans la première $c^2 - a^2 - b^2 + a^2 \neq 0$ à cause de $c^2 - b^2 \neq 0$.

$a^2n^2 = (c^2 - a^2)m^2$ donne dans la première la condition

$$(32) \qquad (1 + \nu''k^2)\nu'k^2 = \frac{k^2\nu^2a^2b^2}{c^4},$$

$$\frac{l^2}{0} = \frac{m^2}{a^2} = \frac{n^2}{c^2 - a^2} = \frac{m^2 + n^2}{c^2} = \frac{p^2}{a^2c^2},$$

$$ax \pm z\sqrt{c^2 - a^2} = ac,$$

$$x \pm z\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = c,$$

$$\frac{a}{c}x \pm z\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = a,$$

$$y\sqrt{1 + \nu'k^2} \pm zk\sqrt{\nu'} = a.$$

A cette solution doit se joindre la solution symétrique, par échange de a, l avec b, m, exigeant une surface où

$$(33) \qquad (1 + \nu'k^2)\nu''k^2 = k^2\frac{\nu^2a^2b^2}{c^4}.$$

Enfin, une surface réunissant les deux conditions (32), (33) exigerait

$$(1 + \nu'k^2)\nu'' = (1 + \nu''k^2)\nu' = \nu^2\frac{a^2b^2}{c^4},$$

$$k^2\nu'^2 + \nu' - \nu^2\frac{a^2b^2}{c^4} = 0,$$

$$\nu' = \nu'' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}}}{2k^2} = \frac{-1 \pm \left(1 + 2\frac{a^2b^2k^2\nu^2}{c^4} + \dots\right)}{2k^2};$$

La seule solution physiquement admissible est celle qui, correspondant au signe $+$, est infiniment petite avec ν, savoir :

$$(34) \qquad \nu' = \nu'' = \frac{a^2b^2}{c^4}\nu^2 + \dots.$$

Mais ce cas a déjà été exclu ($a^2 \neq b^2$).

La condition $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ peut être vérifiée par $n = 0$, mais alors

$$\varphi = \left[p^2\left(1 - \frac{a^2b^2k^2\nu^2}{c^4}\right) - (b^2l^2 + a^2m^2)\right][p^2 - c^2(l^2 + m^2)].$$

Il faut donc annuler l'un ou l'autre de ces deux facteurs.

Le second sera étudié tout à l'heure. L'annulation du premier donne

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l} = lb^2[-p^2 + c^2(l^2 + m^2)],$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = ma^2[-p^2 + c^2(l^2 + m^2)].$$

Si donc nous supposons ce second facteur $\neq 0$, nous ne trouvons comme solution que le plan $l = m = n = 0$ de l'infini qui est, en effet, un plan singulier de la surface, sans intérêt au point de vue physique.

Étudions en détail les solutions

$$n = 0, \qquad p^2 - c^2(l^2 + m^2) = 0,$$

communes à notre surface, à celle de Fresnel, et au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon c. Dans quelles conditions ces plans peuvent-ils être singuliers pour notre surface ?

Posons, pour le voir,

$$l = \frac{p}{c}\cos\theta, \qquad m = \frac{p}{c}\sin\theta,$$

et cherchons à vérifier $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial m} = 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{p^3}{c}\cos\theta\left[b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - c^2\left(1 - k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial m} = \frac{p^3}{c}\sin\theta\left[b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - c^2\left(1 - k^2\nu^2\frac{a^2b^2}{c^4}\right)\right] = 0.$$

Nous obtenons d'abord

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad l = 0 \qquad \text{avec} \qquad \nu'^2 = \nu^2\frac{a^2b^2}{c^4},$$

déjà rencontré dans une étude antérieure, puis

$$\theta = 0 \quad \text{ou} \quad m = 0 \qquad \text{avec} \qquad \nu' = -\nu^2 \frac{a^2 b^2}{c^4}$$

également rencontré.

Les facteurs $\cos\theta \sin\theta$ étant supposés $\neq 0$, il reste à annuler le second facteur commun aux deux dérivées, qui donne

$$\operatorname{tang}^2\theta = \frac{b^2 c^2 - c^4 + k^2 a^2 b^2 \nu^2}{c^4 - a^2 b^2 k^2 \nu^2 - a^2 c^2} = -\frac{c^4 \nu'' + a^2 b^2 \nu^2}{a^2 b^2 \nu^2 + c^4 \nu'}.$$

Le cas $b = a\,(\nu' = \nu'')$ donne $\operatorname{tang}^2\theta = -1$, nous ne devions donc pas trouver de solution dans la première Partie.

La réalité de θ exige que $\frac{a^2 b^2}{c^4}\nu^2$ soit compris entre $-\nu''$ et $-\nu'$.

On peut supposer $a > b$, nous l'avons dit.

Alors, la double condition sera

$$(35) \qquad -\nu' < \frac{a^2 b^2}{c^4}\nu^2 < -\nu''.$$

Ce sont les conditions trouvées au paragraphe II par la discussion de (D_1) et (D_3).

TROISIÈME PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

Il nous reste à généraliser et à compléter les théories précédentes. Nous le ferons en introduisant le système d'ondes le plus général indiqué par M. Boussinesq dans son Mémoire déjà cité ([1]) (*Contribution à l'optique cristalline*). Ce système est le suivant :

$$(36)\quad \begin{cases} a\xi'' + f\eta'' + e\zeta'' + 2a'\xi' + f'\eta' + e'\zeta' + (e''\zeta' - f''\eta') = \Delta_2\xi - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ f\xi'' + b\eta'' + d\zeta'' + f'\xi' + 2b'\eta' + d'\zeta' + (f''\xi' - d''\zeta') = \Delta_2\eta - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ e\xi'' + d\eta'' + c\zeta'' + e'\xi' + d'\eta' + 2c'\zeta' + (d''\eta' - e''\xi') = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

ξ, η, ζ désignent toujours les composantes, suivant Ox, Oy, Oz, du déplacement de la molécule vibrante.

a, b, c sont trois paramètres spécifiques ou propres au milieu, respectivement égaux à $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$ des Chapitres précédents.

Δ_2 désigne le paramètre différentiel du second ordre de Lamé, θ la dilatation cubique.

a′, b′, c′, d′, e′, f′ sont six coefficients de résistance caractérisant l'absorption dont l'étude faisait l'objet de ce Mémoire, consacré aux milieux translucides (et non complètement transparents). Ils seront nuls pour nous.

De plus, la nécessité de les réduire à trois (a′, b′, c′) obligeait à un choix d'axes coordonnés laissant les six coefficients a, b, c, d, e, f.

Au contraire, leur annulation, dans notre étude de milieux tous transparents, nous permet un autre choix d'axes annulant d, e, f.

Enfin les coefficients d″, e″, f″, réduits à zéro dans ce Mémoire

([1]) 6e série, t. VII, 1911, p. 317.

(p. 326) comme étrangers à l'absorption, vont être au contraire essentiels pour nous et concourir, avec a, b, c, à constituer le système le plus général de notre étude.

Ce système va nous fournir, comme ceux des précédents, quatre Chapitres de mêmes titres.

Le complément annoncé, formant un cinquième Chapitre nouveau par rapport aux deux parties précédentes, aura pour objet d'étendre les résultats de cette analyse, où les ondes planes étaient supposées *latéralement indéfinies*, au cas de la réalité, qui est celui des ondes *planes latéralement limitées*, en montrant que les conséquences physiques subsistent.

Nous partons donc des équations

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} a\xi'' + (e''\zeta' - f''\eta') &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx},\\ b\eta'' + (f''\xi' - d''\zeta') &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy},\\ c\zeta'' + (d''\eta' - e''\xi') &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz},\end{aligned}\right.$$

que nous cherchons à vérifier par des solutions symboliques de forme pendulaire

$$(38)\qquad \frac{\xi}{L'} = \frac{\eta}{M'} = \frac{\zeta}{N'} = I e^{k(t - lx - my - nz)\sqrt{-1}} = IE,$$

où, pour abréger, l'exponentielle sera représentée par E.

Les coefficients L, M, N de M. Boussinesq deviennent ici les constantes réelles l, m, n, coefficients de l'équation du plan de l'onde. L', M', N', I sont des constantes imaginaires à déterminer. Toute solution du système sera accompagnée de la solution conjuguée et la somme des deux nous donnera la solution réelle et pendulaire du problème.

Je porte ces expressions dans les équations du mouvement, dont la première devient, après suppression des facteurs IE,

$$\begin{aligned} &-a k^2 L' + e'' k\sqrt{-1}\, N' - f'' k\sqrt{-1}\, M' \\ &= -k^2(l^2 + m^2 + n^2)L' + k^2 l(lL' + mM' + nN') \end{aligned}$$

ou

$$o = [-(l^2 + m^2 + n^2) + l^2 + a]L' + \left(lm + \frac{f''}{k}\sqrt{-1}\right)M' + \left(nl - \frac{e''}{k}\sqrt{-1}\right)N'.$$

Ces trois équations peuvent donc s'écrire

$$(39)\qquad \begin{cases} \Phi\, \mathrm{L}' + \mathrm{X}\, \mathrm{M}' + \Psi\, \mathrm{N}' = 0, \\ \Phi_1 \mathrm{L}' + \mathrm{X}_1 \mathrm{M}' + \Psi_1 \mathrm{N}' = 0, \\ \Phi_2 \mathrm{L}' + \mathrm{X}_2 \mathrm{M}' + \Psi_2 \mathrm{N}' = 0, \end{cases}$$

si les symboles $\Phi, \ldots, \Psi_2$ ont les significations

$$(40)\qquad \left\{ \begin{array}{l|l|l} \Phi = -(l^2 + m^2 + n^2) + l^2 + \mathrm{a} & \mathrm{X} = lm + \nu_2\sqrt{-1} & \Psi = nl - \nu_1\sqrt{-1}, \\ \Phi_1 = lm - \nu_2\sqrt{-1} & \mathrm{X}_1 = -(l^2 + m^2 + n^2) + m^2 + \mathrm{b} & \Psi_1 = mn + \nu\sqrt{-1}, \\ \Phi_2 = nl + \nu_1\sqrt{-1} & \mathrm{X}_2 = mn - \nu\sqrt{-1} & \Psi_2 = -(l^2 + m^2 + n^2) + n^2 + \mathrm{c} \end{array} \right.$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}''}{k} = \nu, \qquad \frac{\mathrm{e}''}{k} = \nu_1, \qquad \frac{\mathrm{f}''}{k} = \nu_2.$$

Les ν détruisent la symétrie du déterminant de ces neuf polynomes $\Phi, \ldots, \Psi_2$, laquelle existait avec $\varphi, \ldots, \psi_2$ du Mémoire de M. Boussinesq, et vont, d'une part, compliquer beaucoup les résultats, notamment donner à l'équation de la surface des ondes sa forme la plus générale (Chapitre III), principal objet du présent travail, et renfermant les précédentes ; d'autre part nécessiter, pour le cas des ondes planes latéralement limitées, une analyse un peu différente de celle de M. Boussinesq (Chapitre V).

Les lignes du déterminant, au lieu d'être identiques aux colonnes, en sont respectivement les conjuguées.

La condition de compatibilité des équations linéaires et homogènes s'écrit

$$(41)\qquad \begin{vmatrix} \varphi & \chi + \nu_2\sqrt{-1} & \psi - \nu_1\sqrt{-1} \\ \chi - \nu_2\sqrt{-1} & \chi_1 & \psi_1 + \nu\sqrt{-1} \\ \psi + \nu_1\sqrt{-1} & \psi_1 - \nu\sqrt{-1} & \psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$(42)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Phi = \varphi, & \mathrm{X} = \chi + \nu_2\sqrt{-1}, & \Psi = \psi - \nu_1\sqrt{-1}, \\ \Phi_1 = \varphi_1 - \nu_2\sqrt{-1}, & \mathrm{X}_1 = \chi_1, & \Psi_1 = \psi_1 + \nu\sqrt{-1}, \\ \quad = \chi - \nu_2\sqrt{-1}, & & \\ \Phi_2 = \varphi_2 + \nu_1\sqrt{-1}, & \mathrm{X}_2 = \chi_2 - \nu\sqrt{-1}, & \Psi_2 = \psi_2, \\ \quad = \psi + \nu_1\sqrt{-1}, & \quad = \psi_1 - \nu\sqrt{-1}, & \end{array} \right.$$

et introduisant les polynomes mêmes φ, ..., ψ_2 de M. Boussinesq, et les ν, ν_1, ν_2 qui distinguent notre étude.

En développant, il vient

$$\begin{aligned} 0 = \varphi\chi_1\psi_2 - \varphi(\psi_1^2+\nu^2) - \chi_1(\psi^2+\nu_1^2) - \psi_2(\chi^2+\nu_2^2) \\ - (\psi_1+\nu\sqrt{-1})(\psi+\nu_1\sqrt{-1})(\chi+\nu_2\sqrt{-1}) \\ + (\psi_1-\nu\sqrt{-1})(\psi-\nu_1\sqrt{-1})(\chi-\nu_2\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Les deux dernières lignes contiennent deux expressions imaginaires conjuguées et l'équation se réduit à

$$\begin{aligned} 0 = {} & (l^2+m^2+n^2)(\mathrm{a}l^2+\mathrm{b}m^2+\mathrm{c}n^2) \\ & - [\mathrm{a}(\mathrm{b}+\mathrm{c})l^2+\mathrm{b}(\mathrm{c}+\mathrm{a})m^2+\mathrm{c}(\mathrm{a}+\mathrm{b})n^2] + \mathrm{abc} \\ & - [(\nu l+\nu_1 m+\nu_2 n)^2 - (\nu^2+\nu_1^2+\nu_2^2)(l^2+m^2+n^2) + \mathrm{a}\nu^2+\mathrm{b}\nu_1^2+\mathrm{c}\nu_2^2]. \end{aligned}$$

Pour la simplicité et l'homogénéité des calculs ultérieurs, qui devront d'ailleurs redonner comme cas particulier les résultats des première et deuxième Parties de ce travail, nous allons :

1° Revenir des notations du Mémoire de M. Boussinesq à celles de sa *Théorie analytique de la chaleur*, c'est-à-dire remplacer a, b, c par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$;

2° Poser

$$\nu = \frac{\delta\alpha_1}{abc}, \qquad \nu_1 = \frac{\delta\beta_1}{abc}, \qquad \nu_2 = \frac{\delta\gamma_1}{abc} \qquad (\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1),$$

ce qui revient à considérer les trois coefficients de dissymétrie ν, ν_1, ν_2 comme étant, au facteur $\frac{1}{abc}$ près (introduit pour l'homogénéité), les projections sur les trois axes coordonnés d'un segment δ, de même ordre de petitesse que ν, ν_1, ν_2, et faisant avec ces axes des angles dont les cosinus sont α_1, β_1, γ_1. L'angle de cet *axe de dissymétrie* avec la normale au plan de l'onde, dont nous représenterons les cosinus par α, β, γ, avec

$$l = \frac{\alpha}{\omega}, \qquad m = \frac{\beta}{\omega}, \qquad n = \frac{\gamma}{\omega},$$

sera donc donné par

$$\cos\theta = \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1.$$

Alors la condition de compatibilité des équations linéaires devient

$$(43)\quad 0=(l^2+m^2+n^2)\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)$$
$$-\left[\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{l^2}{a^2}+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{m^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{n^2}{c^2}\right]+\frac{1}{a^2b^2c^2}$$
$$-\frac{\delta^2}{a^2b^2c^2}\left[(l\alpha_1+m\beta_1+n\gamma_1)^2-(l^2+m^2+n^2)+\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right].$$

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX VITESSES DE PROPAGATION.

Pour avoir l'équation aux vitesses, je remplace l, m, n par leurs valeurs :

$$l=\frac{\alpha}{\omega},\qquad m=\frac{\beta}{\omega},\qquad n=\frac{\gamma}{\omega},$$

et il vient

$$(44)\quad 0=\frac{1}{\omega^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)$$
$$-\frac{1}{a^2b^2c^2\omega^2}\left[(b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2-\delta^2\sin^2\theta\right]$$
$$+\frac{1}{a^2b^2c^2}\left[1-\delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right],$$

homogène et de degré -6 puisque a, b, c, δ, ω sont de degré 1 et α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 de degré 0.

Faisons successivement dans cette équation $\omega^2=a^2$, b^2, c^2.

Pour cela écrivons-la ainsi

$$f(\omega)=\frac{1}{\omega^4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)-\frac{1}{\omega^2}\left[\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{\alpha^2}{a^2}+\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{\beta^2}{b^2}+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{\gamma^2}{c^2}\right]$$
$$+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{a^2b^2c^2}+\delta^2\left[\frac{\sin^2\theta}{a^2b^2c^2\omega^2}-\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right].$$

Alors

$$f(a)=\frac{\alpha^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{\delta^2}{a^2b^2c^2}\left[\frac{\sin^2\theta}{a^2}-\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]$$

et, par permutations circulaires,

$$f(b) = \frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2}\left[\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right],$$

$$f(c) = \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2}\left[\frac{\sin^2\theta}{c^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right].$$

Si l'on suppose $a^2 > b^2 > c^2$, c'est-à-dire $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$, et δ assez petit pour que les premiers termes donnent leurs signes, on aura

$$f(a) > 0, \qquad f(b) < 0, \qquad f(c) > 0,$$

et les deux racines ω^2 de l'équation sont séparées par a^2, b^2, c^2, *comme dans le cas de Fresnel*.

Sans avoir un résultat aussi complet, on aura encore $f(b) < 0$, c'est-à-dire les racines ω^2 séparées par b^2 $\Big($et, par suite, $\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{b^2}$ de signe contraire pour les deux, ce qui entraînait la description des ellipses en sens contraire$\Big)$, tant que les éléments du phénomène vérifieront la relation

$$\frac{\delta^2}{a^2 b^2 c^2}\left[\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] < \frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$

c'est-à-dire en particulier dans le cas où

$$\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) < 0,$$

et, dans le cas où cette expression est > 0, si

$$\delta^2 < a^2 b^2 c^2 \frac{\frac{\beta^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)}{\frac{\sin^2\theta}{b^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}.$$

Enfin, d'une manière générale, la condition de réalité s'écrit

$$\begin{aligned}\delta^4 \sin^4\theta - 2\Big\{&[(b^2+c^2)\alpha^2 + (c^2+a^2)\beta^2 + (a^2+b^2)\gamma^2]\sin^2\theta \\ &- 2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)a^2 b^2 c^2\Big\}\delta^2 \\ &+ [(b^2+c^2)\alpha^2 + (c^2+a^2)\beta^2 + (a^2+b^2)\gamma^2]^2 - 4a^2 b^2 c^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Il faut donc que δ^2 soit extérieur aux racines de ce trinome, qui

peuvent être réelles, car pour

$$\delta^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}[(b^2+c^2)\alpha^2+(c^2+a^2)\beta^2+(a^2+b^2)\gamma^2] < \frac{1}{\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}}$$

(circonstances effectivement réalisables), l'expression sera bien négative.

Le seul cas de la pratique est celui où il est assez voisin de zéro pour ne pas dépasser la plus petite racine supposée positive.

CHAPITRE III.

CONSÉQUENCES PHYSIQUES.

I. — Résolution symétrique du système d'équations par le déterminant adjoint.

Le phénomène physique est, ici encore, analytiquement traduit par la forme des trajectoires, c'est-à-dire par la résolution des équations linéaires et homogènes (39), que nous venons de rendre compatibles et qui fournissent des valeurs proportionnelles à L', M', N'.

Obtenons d'abord ces valeurs sous une forme symétrique utilisant les trois équations (39), dont aucune *a priori* ne joue un rôle à part.

A cet effet, adoptant un moment, pour leur déterminant, les notations classiques du déterminant symétrique

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b}'' & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b}'' & \mathfrak{a}' & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c}' & \mathfrak{b} & \mathfrak{a}'' \end{vmatrix},$$

nous remarquerons que, dans leur déterminant Δ, les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont, non plus égaux, mais imaginaires conjugués : nous désignerons, suivant l'usage, par $\mathfrak{b}_0$ la conjuguée de $\mathfrak{b}$, et nous aurons alors

$$(39\ bis)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b}'' & \mathfrak{b}'_0 \\ \mathfrak{b}''_0 & \mathfrak{a}' & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' & \mathfrak{b}_0 & \mathfrak{a}'' \end{vmatrix}, \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{a} = \varphi, \\ \mathfrak{a}' = \chi_1, \\ \mathfrak{a}'' = \psi_2, \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{b} = \psi_1 + \nu\sqrt{-1}, \\ \mathfrak{b}' = \psi + \nu_1\sqrt{-1}, \\ \mathfrak{b}'' = \chi + \nu_2\sqrt{-1}, \end{array} \right.$$

On sait alors que les solutions du système (39) écrit,

$$\begin{aligned} \mathrm{a}L' + \mathrm{b}''M' + \mathrm{b}'_0 N' &= 0,\\ \mathrm{b}''_0 L' + \mathrm{a}' M' + \mathrm{b}\, N' &= 0,\\ \mathrm{b}' L' + \mathrm{b}_0 M' + \mathrm{a}'' N' &= 0, \end{aligned}$$

sont les mineurs du troisième degré déduits de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \mathrm{a} & \mathrm{b}'' & \mathrm{b}' & \lambda \\ \mathrm{b}''_0 & \mathrm{a}' & \mathrm{b} & \lambda' \\ \mathrm{b}' & \mathrm{b}_0 & \mathrm{a}'' & \lambda'' \end{matrix} \right\|$$

avec les signes $+$, $-$, $+$, les paramètres λ, λ', λ'' étant des indéterminées surabondantes. Si nous les prenons égales à l, m, n, nous aurons

$$\begin{aligned} L' &= l\mathrm{A} + m\mathrm{B}''_0 + n\mathrm{B}',\\ M' &= l\mathrm{B}'' + m\mathrm{A}' + n\mathrm{B}_0,\\ N' &= l\mathrm{B}'_0 + m\,\mathrm{B} + n\mathrm{A}'', \end{aligned}$$

les grandes lettres désignant, suivant l'usage, les mineurs de Δ, pris avec les signes convenables dans le développement de Δ ou les éléments du déterminant adjoint. Mais ici, en remplaçant les éléments de Δ par les notations du présent travail, c'est-à-dire (39 *bis*) par (40) et (42), il vient

$$(39\,ter)\ \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A} &= m^2\left(\mathrm{c} - \frac{1}{\omega^2}\right) + n^2\left(\mathrm{b} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\mathrm{b} - \frac{1}{\omega^2}\right)\left(\mathrm{c} - \frac{1}{\omega^2}\right) - \nu^2,\\ \mathrm{B}''_0 &= lm\left(\frac{1}{\omega^2} - \mathrm{c}\right) - \nu\nu_1 - \left[nl\nu + mn\nu_1 + \left(-\frac{1}{\omega^2} + n^2 + \mathrm{c}\right)\nu_2\right]\sqrt{-1},\\ \mathrm{B}' &= nl\left(\frac{1}{\omega^2} - \mathrm{b}\right) - \nu_2\nu + \left[mn\nu_2 + lm\nu + \left(-\frac{1}{\omega^2} + m^2 + \mathrm{b}\right)\nu_1\right]\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

En formant alors L', remarquons que

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\omega^2},$$

et que

$$l\nu + m\nu_1 + n\nu_2 = \frac{\alpha\nu + \beta\nu_1 + \gamma\nu_2}{\omega} = \frac{\delta_1}{\omega},$$

δ_1 étant la projection de l'axe de dissymétrie (de composantes ν, ν_1, ν_2) sur la normale au plan de l'onde (de cosinus α, β, γ), toujours au facteur $\frac{1}{abc}$ près (Chap. I).

Introduisons en outre les trois coefficients

$$a - \frac{1}{\omega^2} = \nu',$$

$$b - \frac{1}{\omega^2} = \nu'_1,$$

$$c - \frac{1}{\omega^2} = \nu'_2,$$

qui ont des sens analogues à ν' et ν'' de la deuxième Partie. Nous aurons alors

$$\begin{aligned} L' &= l\nu'_1\nu'_2 - \nu\frac{\delta_1}{\omega} + (n\nu_1\nu'_1 - m\nu_2\nu'_2)\sqrt{-1} \\ &= l\nu'_1\nu'_2 - \alpha\frac{\delta\delta_1}{\omega} + \delta(n\beta\nu'_1 - m\gamma\nu'_2)\sqrt{-1} \end{aligned}$$

et, par permutations circulaires, M′ et N′, que j'appelle

$$\begin{aligned} L' &= l' + l'_1\sqrt{-1}, \\ M' &= m' + m'_1\sqrt{-1}, \\ N' &= n' + n'_1\sqrt{-1} \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\xi = (l' + l'_1\sqrt{-1})\, e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}} = L'\, e^{\theta\sqrt{-1}},$$

dont on doit prendre la partie réelle

$$\begin{aligned} \xi &= l'\cos\theta - l'_1\sin\theta, \\ \eta &= m'\cos\theta - m'_1\sin\theta, \\ \zeta &= n'\cos\theta - n'_1\sin\theta. \end{aligned}$$

C'est la forme la plus générale d'une vibration elliptique. Nous n'en poursuivrons pas l'étude : on la particularisera dans les hypothèses fournies par l'expérience. Nous nous bornerons aux remarques suivantes :

I. D'abord, les propriétés du déterminant adjoint ([1]) se traduisent par les formules ci-après, qui, pour le cas de $b_0 = b$, $b'_0 = b'$, $b''_0 = b''$, réels, donnent celles qu'on utilise dans l'étude de l'équation en S des

([1]) Salmon, *Algèbre*, p. 45. Gauthier-Villars, 1890.

quadriques

$$A'A'' - BB_0 = a\ \Delta = 0,$$
$$B'B'' - AB_0 = b\ \Delta = 0,$$
$$B'_0 B''_0 - AB = b_0 \Delta = 0$$

et deux autres groupes par permutations.

Alors, en introduisant les modules, puisque A, A′, A″ sont réels,

$$\begin{cases} A'A'' = |B|^2 \\ |B'|\,|B''| = A\,|B| \end{cases}$$

et les autres qui constituent, entre les modules, les relations mêmes du déterminant symétrique. Alors, les valeurs proportionnelles

$$\frac{L'}{A} = \frac{M'}{B''} = \frac{N'}{B'_0}$$

et leurs conjuguées

$$\frac{L_0}{A} = \frac{M'_0}{B''_0} = \frac{N'_0}{B'}$$

donnent, en multipliant membre à membre,

$$\frac{|L'|^2}{A} = \frac{|M'|^2}{A'} = \frac{|N'|^2}{A''}$$

ou

$$\frac{L'}{|B'B''|} = \frac{M'}{|B''B|} = \frac{N'}{|BB'|}.$$

II. Les expressions L′, M′, N′ contiennent les deux systèmes de coefficients δ (et sa projection δ_1) et (ν', ν'_1, ν'_2).

Mais l', m', n' sont composés de deux termes du second ordre, l'un par rapport à (ν', ν'_1, ν'_2), l'autre par rapport à δ.

Au contraire, l'_1, m'_1, n'_1, sont composés d'un seul terme produit de δ par un facteur du premier ordre en (ν', ν'_1, ν'_2). D'où l'interprétation de ces résultats dans deux cas opposés.

Le premier est celui des expériences étudiées dans la première et la deuxième Partie, qu'il contient comme cas particulier. C'est celui où a, b, c sont peu différents et où, par suite, les racines $\frac{1}{\omega^2}$ de l'équation (44) aux vitesses en diffèrent peu. C'est le cas où ν', ν'_1, ν'_2 sont très petits, et même, dans la réalité, d'ordre supérieur à δ. Alors, l', m', n' sont d'ordre 2 et l'_1, m'_1, n'_1 d'ordre supérieur à 2.

Le second, tout à fait nouveau, est celui où les différences de a, b, c entre eux $\left(\text{et par suite avec } \frac{1}{\omega^2}\right)$ seraient finies par rapport à l'axe de dissymétrie δ, supposé du premier ordre, c'est-à-dire où ν', ν'_1, ν'_2 seraient finies.

Alors, l', m', n' sont finies, et l'_1, m'_1, n'_1 du premier ordre.

Pour pousser plus loin l'étude de ces deux cas, nous allons renoncer à la symétrie observée dans ce paragraphe, et prendre par exemple les deux premières équations, isolant ainsi l'axe Oz, ce qui donnera les projections des trajectoires plus facilement sur Oxy, et obtenant

$$\frac{L'}{B'} = \frac{M'}{B_0} = \frac{N'}{A''}.$$

les termes du premier ordre ne disparaîtront plus ici comme dans la résolution symétrique.

II. — Résolution dissymétrique et interprétation physique.

Premier cas. — C'est, comme nous l'avons dit, celui où ν', ν'_1, ν'_2 sont du second ordre par rapport à δ supposé du premier. Mais alors les formules (39 *ter*) donnent par permutation

$$\begin{aligned} A'' &= l^2\nu'_1 + m^2\nu' + \nu'\nu'_1 - \nu_2^2, \\ B' &= -nl\nu'_1 - \nu_2\nu + \left(m\frac{\delta_1}{\omega} + \nu'_2\right)\sqrt{-1}, \\ B_0 &= -mn\nu' - \nu_1\nu_2 - \left(l\frac{\delta_1}{\omega} + \nu_1\right)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

qui ont leurs parties réelles du second ordre. On peut donc prendre, en négligeant le second ordre dans les deux dernières et le quatrième dans la première,

$$\frac{L'}{m\delta_1\sqrt{-1}} = \frac{M'}{-l\delta_1\sqrt{-1}} = \frac{N'}{(l^2\nu'_1 + m^2\nu' - \nu_2^2)\omega},$$

d'où

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -m\delta_1\cos\theta, \\ \eta &= l\delta_1\sin\theta, \\ \zeta &= (l^2\nu'_1 + m^2\nu' - \nu_2^2)\omega\cos\theta, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$l\xi + m\eta = 0,$$

ou

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

au second ordre près.

Nous retrouvons la *quasi-transversalité des vibrations, qui au second ordre près s'effectuent dans le plan de l'onde et rectilignement.*

Second cas. — Supposons au contraire les différences des a, b, c entre eux $\left(\text{et par suite avec } \frac{1}{\omega^2}\right)$ finies par rapport à l'axe de dissymétrie δ supposé du premier ordre, c'est-à-dire ν', ν'_1, ν'_2 finies.

Ici nous poserons, avec M. Boussinesq [p. 334 du Mémoire, formules (43)],

$$(46)\quad L' = l'(1 + l''\sqrt{-1}),\quad M' = m'(1 + m''\sqrt{-1}),\quad N' = n'(1 + n''\sqrt{-1}),$$

ce qui, comme première approximation, se réduira à

$$(47)\qquad L' = l'e^{l''\sqrt{-1}},\qquad M' = m'e^{m''\sqrt{-1}},\qquad N' = n'e^{n''\sqrt{-1}}$$

(car nous avons montré que l'', m'', n'' sont du premier ordre par rapport à δ), les parenthèses contenant les deux premiers termes du développement des exponentielles.

l', m', n' sont donc les modules de L', M', N', et l'on a, comme nous l'avons montré,

$$\frac{l'}{\sqrt{A}} = \frac{m'}{\sqrt{A'}} = \frac{n'}{\sqrt{A''}}.$$

D'autre part les valeurs proportionnelles $\frac{L'}{B'} = \frac{M'}{B_0} = \frac{N'}{A''}$ ou

$$\frac{l'e^{l''\sqrt{-1}}}{B'} = \frac{m'e^{m''\sqrt{-1}}}{B_0} = \frac{n'e^{n''\sqrt{-1}}}{A''}$$

peuvent s'écrire

$$\frac{l'e^{(l''-n'')\sqrt{-1}}}{B'} = \frac{m'e^{(m''-n'')\sqrt{-1}}}{B_0} = \frac{n'}{A''}.$$

Mais on peut prendre pour ces rapports la valeur 1, puisque les termes du dernier sont réels, et supposer $n'' = 0$, ce qui ne fera qu'un changement de phase pour les mouvements vibratoires. On

prendra donc

$$l'(1 + l''\sqrt{-1}) = B',$$
$$m'(1 + m''\sqrt{-1}) = B_0,$$
$$n' = A'', \qquad n'' = 0.$$

Alors

$$l' = nl\left(\frac{1}{\omega^2} - b\right) = -nl\nu'_1,$$
$$m' = mn\left(\frac{1}{\omega^2} - a\right) = -mn\nu',$$
$$n' = l^2\left(b - \frac{1}{\omega^2}\right) + m^2\left(a - \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(a - \frac{1}{\omega^2}\right)\left(b - \frac{1}{\omega^2}\right) - \nu_2^2$$
$$= l^2\nu'_1 + m^2\nu' + \nu'\nu'_1 \qquad \text{(en négligeant } \nu_2^2\text{)}.$$
$$l'l'' = m\frac{\delta_1}{\omega} + \nu_1\nu'_1,$$
$$m'm'' = -l\frac{\delta_1}{\omega} - \nu\nu',$$
$$n'' = 0.$$

Les équations du mouvement, obtenues, comme nous l'avons déjà dit, en prenant pour les composantes du déplacement les demi-sommes des deux solutions imaginaires conjuguées

$$\xi = l'e^{l''\sqrt{-1}}e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}} = l'e^{l''\sqrt{-1}}e^{\theta\sqrt{-1}} = l'e^{(\theta+l'')\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= l'\cos(\theta + l''),\\ \eta &= m'\cos(\theta + m''),\\ \zeta &= n'\cos\theta.\end{aligned}\right.$$

C'est la forme classique de la vibration elliptique dans le plan

$$\begin{vmatrix} \xi & l'\cos l'' & l'\sin l'' \\ \eta & m'\cos m'' & m'\sin m'' \\ \zeta & n' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

que, à notre approximation, nous pouvons et devons réduire à

$$\begin{vmatrix} \xi & l' & l'l'' \\ \eta & m' & m'm'' \\ \zeta & n' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et sur le cylindre elliptique projetant l'ellipse trajectoire sur le plan

de xy auquel nous avons fait jouer un rôle à part. On peut l'écrire

$$\left(\xi\frac{m''}{l'} - \eta\frac{l'}{m'}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{l'} - \frac{\eta}{m'}\right)^2 = (l' - m'')^2.$$

Ces formules tomberaient en défaut dans *l'hypothèse très particulière où $l'' = m''$*, c'est-à-dire où la vibration, dans le plan $\frac{\xi}{l'} = \frac{\eta}{m'}$, serait donnée par

$$(49)\qquad \begin{cases} \xi = l' \cos(\theta + l''), \\ \eta = m' \cos(\theta + l''), \\ \zeta = n' \cos\theta. \end{cases}$$

Tout d'abord cette hypothèse est celle où l'on aurait, entre les constantes, la relation

$$\frac{l' l''}{l'} = \frac{m' m''}{m'}$$

ou

$$0 = \left(\frac{n^2}{\nu'_1} + \frac{l^2}{\nu'} + 1\right)\frac{\delta_1}{\omega} - n\nu_2 = 0.$$

Elle serait, en particulier, *réalisée si l'axe de dissymétrie était situé dans le plan* Oxy $(\nu_2 = 0)$ *et dans le plan de l'onde* $(\delta_1 = 0)$, *c'est-à-dire sur leur intersection.*

En second lieu, le rayon vecteur r de cette ellipse est donné par

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (l'^2 + m'^2)\cos^2(\theta + l'') + n'^2\cos^2\theta,$$

et les maxima et minima correspondant aux axes de l'ellipse vérifient la relation

$$0 = r\frac{dr}{d\theta} = -(l'^2 + m'^2)\cos(\theta + l'')\sin(\theta + l'') - n'^2\cos\theta\sin\theta,$$

ou, à notre approximation, en remplaçant $\cos 2l''$ par 1 et $\sin 2l''$ par $2l''$,

$$0 = (l'^2 + m'^2)(\sin 2\theta + 2l''\cos 2\theta) + n'^2\sin 2\theta,$$

$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{2l''(l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \operatorname{tang}(\pi - 2\varepsilon),$$

ε étant, à notre approximation, donné par

$$(50)\qquad \varepsilon = \frac{l''(l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

d'où, pour les directions des axes,

$$2\theta = \pi - 2\varepsilon \quad \text{et} \quad 2\theta = 2\pi - 2\varepsilon,$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta = \pi - \varepsilon,$$

et, pour les sommets des axes,

$$\xi = l' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon + l''\right) \quad \text{et} \quad \xi = l' \cos(\pi - \varepsilon + l''),$$
$$= l' \sin(\varepsilon - l'') \quad\quad = - l' \cos(\varepsilon - l''),$$
$$\eta = m' \sin(\varepsilon - l'') \quad \text{et} \quad \eta = - m' \cos(\varepsilon - l''),$$
$$\zeta = n' \sin\varepsilon \quad \text{et} \quad \zeta = - n' \cos\varepsilon,$$
$$(51) \quad r^2 = (l'^2 + m'^2)\sin^2(\varepsilon - l'') + n'^2 \sin^2\varepsilon \quad \text{et} \quad r^2 = (l'^2 + m'^2)\cos^2(\varepsilon - l'') + n'^2 \cos^2\varepsilon.$$

Le second de ces deux axes est fini, mais le premier est du premier ordre. *La vibration elliptique est très voisine d'une vibration rectiligne de direction* (l', m', n') *et d'amplitude* $\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}$.

En précisant ces valeurs, à notre approximation, on aura

$$\varepsilon - l'' = \frac{- n'^2 l''}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

et, pour le carré du demi-petit axe,

$$r^2 = \frac{l''^2 n'^2 (l'^2 + m'^2)}{l'^2 + m'^2 + n'^2}.$$

Ayant ainsi examiné *l'hypothèse très particulière* $l'' = m''$, *revenons au cas général* $l'' \neq m''$, qui d'ailleurs va se traiter par la même analyse.

Ici, la vibration étant

$$(48) \quad \begin{cases} \xi = l' \cos(\theta + l''), \\ \eta = m' \cos(\theta + m''), \\ \zeta = n' \cos\theta, \end{cases}$$

le rayon vecteur de l'ellipse sera donné par

$$r^2 = l'^2 \cos^2(\theta + l'') + m'^2 \cos^2(\theta + m'') + n'^2 \cos^2\theta,$$

et les maxima et minima correspondant aux axes de l'ellipse véri-

fieront la relation

$$o = r\frac{dr}{d\theta} = -l'^2\cos(\theta + l'')\sin(\theta + l'')$$
$$- m'^2\cos(\theta + m'')\sin(\theta + m'') - n'^2\cos\theta\sin\theta,$$
$$\text{tang}\,2\theta = -\frac{2(l'^2 l'' + m'^2 m'')}{l'^2 + m'^2 + n'^2} = \text{tang}(\pi - 2\varepsilon),$$

ε étant, à notre approximation, donné par

(52) $$\varepsilon = \frac{l'^2 l'' + m'^2 m''}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$

d'où, pour les directions des axes,

$$2\theta = \pi - 2\varepsilon \quad \text{et} \quad 2\theta = 2\pi - 2\varepsilon,$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \theta = \pi - \varepsilon$$

et, pour les sommets des axes,

$$\xi = l'\sin(\varepsilon - l'') \quad \text{et} \quad \xi = -l'\cos(\varepsilon - l''),$$
$$\eta = m'\sin(\varepsilon - m'') \quad \text{et} \quad \eta = -m'\cos(\varepsilon - m''),$$
$$\zeta = n'\sin\varepsilon \quad \text{et} \quad \zeta = -n'\cos\varepsilon,$$
$$r^2 = l'^2\sin^2(\varepsilon - l'') + m'^2\sin^2(\varepsilon - m'') + n'^2\sin^2\varepsilon \quad \text{et} \quad r^2 = l'^2\cos^2(\varepsilon - l'') + m'^2\cos^2(\varepsilon - m'') + n'^2\cos^2\varepsilon.$$

Le second de ces axes est fini, mais le premier est du premier ordre. La vibration elliptique est très voisine d'une vibration rectiligne de direction (l', m', n') et d'amplitude $\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}$.

On aura ici, à notre approximation,

$$\varepsilon - l'' = \frac{m'^2(m'' - l'') - n'^2 l''}{l'^2 + m'^2 + n'^2},$$
$$\varepsilon - m'' = \frac{l'^2(l'' - m'') - n'^2 m''}{l'^2 + m'^2 + n'^2}$$

et, pour le carré du demi-petit axe,

(53) $$r^2 = l'^2(\varepsilon - l'')^2 + m'^2(\varepsilon - m'')^2 + n'^2\varepsilon^2,$$
$$= \frac{1}{l'^2 + m'^2 + n'^2}[n'^2(l'^2 l''^2 + m'^2 m''^2) + l'^2 m'^2(l'' - m'')^2].$$

D'autres conséquences physiques résulteront de la discussion de la surface des ondes au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

SURFACE DES ONDES.

I. — Propriétés générales.

L'équation tangentielle de la surface des ondes n'est autre que la condition de compatibilité mise sous sa dernière forme (43) en l, m, n. Si nous la rendons homogène, en écrivant le plan de l'onde sous la forme $lx + my + nz = p$, elle devient

$$(54)\quad \begin{aligned} o = p^4 - p^2[(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2] \\ + (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2) \\ - \delta^2p^2\left[p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - (l^2+m^2+n^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2\right], \end{aligned}$$

homogène de degré 4; a, b, c, p, δ de degré 1; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, l, m, n$ de degré o.

Pour $\alpha_1 = \beta_1 = o$, $\gamma_1 = 1$, $\delta = ck\nu$, on retrouve bien l'équation de la seconde Partie (Chap. IV).

Cette équation très générale peut encore s'écrire, comme dans cette seconde Partie,

$$o = F - \delta^2p^2C = o,$$

$F = o$ étant l'équation tangentielle de la surface des ondes de Fresnel, et $C = o$ l'équation tangentielle d'un cercle, dont nous allons fixer les éléments un peu plus loin.

La surface est d'ailleurs circonscrite à la surface de Fresnel le long de sa courbe de contact avec le cône imaginaire de sommet O.

Elle admet encore l'origine pour centre, étant vérifiée par $(-l, -m, -n, -p)$, mais elle n'admet plus les plans coordonnés pour plans de symétrie.

Si l'on considère un plan $lx + my + nz + p = o$ tangent à la surface de Fresnel et au cercle, on a, pour son point de contact avec notre surface $F - \delta^2p^2C = o$, les coordonnées

$$x = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial l} - \delta^2p^2\dfrac{\partial C}{\partial l}}{\dfrac{\partial F}{\partial p} - 2\delta^2pC - \delta^2p^2\dfrac{\partial C}{\partial p}}, \qquad y = \ldots, \qquad z = \ldots$$

Quand notre surface varie avec δ, son point de contact avec ce plan décrit donc la droite qui joint les deux points

$$\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial l}}{\frac{\partial F}{\partial p}}, \frac{\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial F}{\partial p}}, \frac{\frac{\partial F}{\partial n}}{\frac{\partial F}{\partial p}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{p\frac{\partial C}{\partial l}}{2C+p\frac{\partial C}{\partial p}}, \frac{p\frac{\partial C}{\partial m}}{2C+p\frac{\partial C}{\partial p}}, \frac{p\frac{\partial C}{\partial n}}{2C+p\frac{\partial C}{\partial p}}\right).$$

Revenons au cercle dont l'équation tangentielle est $C = 0$.

Il a pour centre l'origine, son rayon R est donné par

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2},$$

c'est-à-dire est le demi-diamètre de direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ dans l'ellipsoïde

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ce qui en fournit une construction géométrique simple. Enfin son plan est

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0.$$

Ces résultats, d'ailleurs classiques d'après l'équation

$$C = \frac{p^2}{R^2} - (l^2 + m^2 + n^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 = 0,$$

se vérifient sans peine de la manière suivante :

1° Les plans tangents de direction

$$l = \alpha_1, \qquad m = \beta_1, \qquad n = \gamma_1$$

sont donnés par la solution double $p^2 = 0$. C'est le plan du cercle.

2° Les plans

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z - R = 0$$

avec

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1\alpha' + \beta_1\beta' + \gamma_1\gamma' = 0,$$

c'est-à-dire à la distance R de l'origine et perpendiculaires au plan du cercle, vérifient l'équation.

3° Tout plan

$$\lambda(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z - R = 0$$

mené par une tangente au cercle vérifie l'équation quel que soit λ, car

$$1 - [(\lambda\alpha_1 + \alpha') + (\lambda\beta_1 + \beta') + (\lambda\gamma_1 + \gamma')]^2$$
$$+ [\alpha_1(\lambda\alpha_1 + \alpha') + \beta_1(\lambda\beta_1 + \beta') + \gamma_1(\lambda\gamma_1 + \gamma')]^2 = 1 - \lambda^2 - 1 + \lambda^2 \equiv 0.$$

La surface est donc, quel que soit le coefficient de dissymétrie δ, inscrite dans la développable circonscrite commune à ce cercle C et à la surface F de Fresnel.

Dans les phénomènes physiques, δ étant très petit, elle est voisine de la surface de Fresnel. Si δ varie d'une façon quelconque, elle engendre le faisceau tangentiel défini par F et C.

Une question naturelle à se poser est celle de savoir si le cercle peut être sur la surface de Fresnel, pour vérifier si notre surface peut être circonscrite à celle de Fresnel suivant ce cercle, la développable circonscrite commune ayant alors ce cercle pour courbe de contact.

Or on connaît sur la surface de Fresnel les trois cercles qui font partie de son intersection par les trois plans coordonnés, et qui ont respectivement pour rayons a, b, c. Le plan de l'onde est alors l'un des plans coordonnés, et le rayon $(\alpha'\beta'\gamma')$ varie dans ce plan, par exemple

$$\alpha' = \beta = \gamma = 0, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

(La surface de Fresnel n'admet pas d'autres cercles de centre O, comme il est facile de s'en assurer sur son équation ponctuelle, en la coupant par une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. On est ramené à des sections cycliques de quadriques, lesquelles ne sont réelles que dans les cas précédents.)

Pour que le rayon du cercle soit égal à l'une des trois longueurs a, b, c, par exemple, il faut qu'on ait

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}$$

ou

$$\frac{\beta^2}{b^2(a^2 - c^2)} = \frac{\gamma^2}{c^2(b^2 - a^2)} = \frac{1 - \alpha^2}{a^2(b^2 - c^2)},$$

ce qui exige $b^2 > a^2 > c^2$.

Et de même pour les autres. *Le rayon correspondant ne peut donc être égal qu'à celui des trois a, b, c qui est compris entre les deux autres,* et la direction du plan de l'onde est alors donnée par les formules précédentes.

C'est ce que nous avons obtenu dans la deuxième Partie avec c.

Quel que soit δ, notre surface admet comme plans tangents ceux qui vérifient à la fois (α), (β), (γ) :

$$(\alpha) \qquad \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -\frac{p}{\rho}.$$

$$(\beta) \qquad p^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - (l^2 + m^2 + n^2) = 0,$$

$\alpha_1\rho$, $\beta_1\rho$, $\gamma_1\rho$ sont les coordonnées du point S où ils coupent l'axe de dissymétrie, ce qui permet d'éliminer $l^2 + m^2 + n^2$ de l'équation de la surface, d'où, en supprimant encore le facteur p^2,

$$(\gamma) \quad p^2 - (a^2 + b^2 + c^2)p^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) + a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2$$
$$+ (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right),$$

ou

$$(\gamma) \quad \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)(b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2) + a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2$$
$$+ p^2\left[1 - (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] = 0.$$

Ce sont donc les plans tangents communs à deux cônes du second degré, de sommet commun $S(\alpha)$, circonscrits à la sphère (β) et à l'ellipsoïde (γ) qui admet comme plans principaux les plans coordonnés. Comme ces cônes dépendent de ρ, ces plans tangents communs définissent une développable fixe, indépendante de δ, à laquelle sont inscrites toutes nos surfaces quand δ varie.

On simplifie un peu ces équations en y introduisant le rayon R de la sphère (β) donné par

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}.$$

Elles deviennent alors

$$(\alpha') \qquad \alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -p\sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{\alpha_1^2}{a^2} - \frac{\beta_1^2}{b^2} - \frac{\gamma_1^2}{c^2}},$$

$$(\beta') \qquad R^2(l^2 + m^2 + n^2) - p^2 = 0,$$

$$(\gamma') \qquad \left(\frac{b^2c^2}{R^2} + a^2\right)l^2 + \left(\frac{c^2a^2}{R^2} + b^2\right)m^2 + \left(\frac{a^2b^2}{R^2} + c^2\right)n^2 + p^2\left(1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{R^2}\right) = 0.$$

L'ellipsoïde (γ') est réel pour

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{R^2} > 1$$

ou

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} > \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

II. — Quatre modes de génération et deux représentations paramétriques de la surface.

Sur l'équation tangentielle se lisent plusieurs modes de génération de notre surface comme enveloppe de diverses séries de développables, de même qu'au point de vue ponctuel une surface peut être considérée comme le lieu de diverses séries de courbes.

Premier mode de génération. — Écrivons l'équation tangentielle ainsi

$$0 = (l^2+m^2+n^2)\left[b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 - (a^2+b^2+c^2)p^2 + \delta^2p^2\right] + p^2\left[a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 + p^2 - \delta^2(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 - \delta^2p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right].$$

La surface est alors l'enveloppe de la développable (au paramètre r) circonscrite à la sphère

$$(55) \qquad r^2(l^2+m^2+n^2) - p^2 = 0,$$

et à la quadrique

$$(56) \qquad b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + \alpha^2b^2n^2 - (a^2+b^2+c^2)p^2 + \delta^2p^2 + r^2\left[a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 + p^2 - \delta^2(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2 - \delta^2p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] = 0.$$

Quand δ varie de zéro à l'infini, cette quadrique varie de l'ellipsoïde

$$(b^2c^2+a^2r^2)l^2+(c^2a^2+b^2r^2)m^2+(a^2b^2+c^2r^2)n^2-(a^2+b^2+c^2-r^2)p^2=0,$$

au couple de points

$$(\alpha_1 l+\beta_1 m+\gamma_1 n)^2+p^2\left[r^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)-1\right]=0.$$

Ce mode de génération est une extension du mode analogue pour la surface de Fresnel ($\delta=0$), qui ne paraît pas avoir été remarqué, au moyen de la sphère et de l'ellipsoïde que nous venons de former. Cet ellipsoïde est réel si $r^2<a^2+b^2+c^2$, c'est-à-dire si le rayon de la sphère est inférieur à la diagonale du parallélépipède rectangle circonscrit à l'ellipsoïde

$$\text{(E)}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

qui donne la surface de Fresnel par la transformation apsidale. Ces deux ellipsoïdes ont les mêmes directions d'axes.

On remarquera que, dans tous ces modes de génération, si $l^2+m^2+n^2=1$, r représente la distance de l'origine au plan tangent à la surface.

Deuxième mode de génération de la surface, comme enveloppe des cônes circonscrits, de quatrième classe, ayant pour sommets les points de l'axe (α_1, β_1, γ_1) de dissymétrie :

Un tel sommet ($\alpha_1\rho$, $\beta_1\rho$, $\gamma_1\rho$) a pour équation tangentielle

$$(57)\qquad \alpha_1\rho l+\beta_1\rho m+\gamma_1\rho n+p=0,$$

ce qui, en remplaçant $\alpha_1 l+\beta_1 m+\gamma_1 n$ par $-\frac{p}{\rho}$, donne pour deuxième surface, définissant le cône variable avec ρ,

$$(58)\quad f=(l^2+m^2+n^2)[b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2-(a^2+b^2+c^2)p^2+\delta^2p^2]$$
$$+p^2\left[a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2+p^2-\delta^2\frac{p^2}{\rho^2}-\delta^2p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]=0.$$

Cette deuxième surface admet comme plans de symétrie les trois plans coordonnés, ce qui n'arrivait pas pour la surface des ondes, par suite de la disparition des termes $(\alpha_1 l+\beta_1 m+\gamma_1 n)^3$. C'est là l'intérêt

de ce deuxième mode de génération, qui condense en quelque sorte la dissymétrie dans le sommet de ces cônes.

Pour $\delta = 0$, elle devient la surface de Fresnel indépendante de ρ, qui définit ses propres cônes circonscrits de sommets alignés sur la direction quelconque $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ issue de son centre.

Pour $\delta \neq 0$ fixe, quand cette surface varie avec ρ, les points de contact M, M', ... des plans tangents parallèles à une même direction (l, m, n), p variant seul, sont donnés par

$$\frac{x}{\frac{\partial f}{\partial l}} = \frac{y}{\frac{\partial f}{\partial m}} = \frac{z}{\frac{\partial f}{\partial n}} = \frac{t}{\frac{\partial f}{\partial p}},$$

c'est-à-dire sont alignés sur un même rayon issu de l'origine, ρ n'entrant que dans $\frac{df}{dp}$.

Mais, $\frac{df}{dp}$ dépendant aussi de l, m, n, le rapport $\frac{\text{OM}}{\text{OM}'}$ varie avec la direction du plan tangent et la surface ne reste pas homothétique à elle-même.

Elle varie, à partir de la surface de Fresnel, avec δ et ρ, comme notre surface des ondes, mais plus simplement, puisqu'elle conserve les trois symétries par rapport aux trois plans coordonnés.

Elle est inscrite dans les deux développables circonscrites d'une part à la surface de Fresnel, et d'autre part à la sphère

$$l^2 + m^2 + n^2 - \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) p^2 = 0, \tag{59}$$

et à l'origine, ce dernier cône étant compté deux fois, c'est-à-dire sa courbe de contact étant celle de la surface elle-même de Fresnel.

Troisième mode de génération, résultant du rapprochement des deux premiers, et fournissant une *représentation paramétrique de la surface*.

D'après les deux modes de génération précédents, notre surface admet comme plans tangents tous ceux qui, dépendant des deux paramètres r et ρ, vérifient les relations

$$(l^2 + m^2 + n^2) = \frac{p^2}{r^2} \tag{60}$$

et

$$\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = -\frac{p}{\rho}, \tag{61}$$

$$\begin{aligned} b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 - (a^2+b^2+c^2-\delta^2)p^2 \\ + r^2\left\{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 + p^2\left[1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - \delta^2\frac{p^2}{\rho^2}\right]\right\} = 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Si l'on résolvait ces trois équations par rapport à $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$ en fonctions des deux paramètres r et ρ, on aurait une représentation paramétrique, non pas du point, mais du plan tangent de la surface, les deux paramètres ayant la signification géométrique définie à propos des deux premiers modes de génération : r est la distance du plan tangent à l'origine, ρ est la distance de l'origine au point où il rencontre l'axe de dissymétrie optique.

Pour la surface de Fresnel, M. Darboux a donné une représentation paramétrique [1] où l'un des paramètres α est notre r^2, l'autre β étant le carré du rayon qui va de l'origine au point de contact du plan tangent considéré. Pour la résolution de ses équations par rapport aux coordonnées ponctuelles et tangentielles, il introduit deux nouvelles variables α', β'.

Nous allons effectuer ici la résolution par rapport à nos coordonnées tangentielles $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$, en introduisant une variable auxiliaire σ, de degré 1 d'homogénéité comme les autres, définie par

$$a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = \frac{\sigma^2}{r^2}p^2,$$

qui ramène la troisième équation à

$$\begin{aligned} b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2 \\ = p^2\left\{a^2+b^2+c^2-\delta^2+\sigma^2+r^2\left[1-\delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\right]\right\} \\ = p^2\theta(\sigma, \rho, r), \end{aligned} \tag{63}$$

en désignant par θ la fonction des variables σ, ρ, r représentée par l'accolade et qui est du deuxième degré d'homogénéité.

---

(1) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4e Partie, 2e fascicule, p. 469-470.

Ces deux équations, jointes à $l^2+m^2+n^2=\frac{p^2}{r^2}$ et linéaires en l^2, m^2, n^2, se résolvent par les formules

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b^2c^2 & c^2a^2 & a^2b^2 \end{vmatrix} = (b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$

(de degré 6 d'homogénéité),

$$\Delta\frac{l^2}{p^2} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2} & 1 & 1 \\ \frac{\sigma^2}{r^2} & b^2 & c^2 \\ \theta & c^2a^2 & a^2b^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2(b^4-c^4)-a^2\sigma^2(b^2-c^2)}{r^2}+\theta(c^2-b^2)$$
$$= (b^2-c^2)\left[\frac{a^2(b^2+c^2-\sigma^2)}{r^2}-\theta\right].$$

Les deux membres sont bien du degré 4 d'homogénéité. On a ainsi les formules de résolution

$$(64)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{p} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}\sqrt{\dfrac{a^2(b^2+c^2-\sigma^2)}{r^2}-\theta(\sigma,\rho,r)}, \\ \dfrac{m}{p} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{n}{p} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui, portées dans la première relation linéaire

$$\alpha_1\frac{l}{p}+\beta_1\frac{m}{p}+\gamma_1\frac{n}{p}=-\frac{1}{\rho},$$

donnent la condition

$$(65)\quad \begin{aligned} &\alpha_1\sqrt{b^2-c^2}\sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2-\sigma^2)}{r^2}-\theta} \\ &+\beta_1\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{\frac{b^2(c^2+a^2-\sigma^2)}{r^2}-\theta} \\ &+\gamma_1\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2-\sigma^2)}{r^2}-\theta}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho}, \end{aligned}$$

entre les paramètres σ, ρ, r, dont deux restent bien par suite indépendants pour la représentation de $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$. Cette condition remplace,

dans une certaine mesure, les relations surabondantes de M. Darboux et sa fonction auxiliaire f.

La signification géométrique de ces trois paramètres surabondants est la suivante :

Les développables $\rho = \text{const.}$ sont les cônes circonscrits à notre surface des divers points de l'axe de dissymétrie optique.

Les développables $r = \text{const.}$ sont circonscrites à notre surface et à des sphères variables de centre O.

Les développables $\sigma = \text{const.}$ sont circonscrites à notre surface et à des ellipsoïdes homothétiques à

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Quand δ se réduit à zéro et notre surface à celle de Fresnel, ρ disparaît de la fonction θ, qui se réduit à

$$\theta = a^2 + b^2 + c^2 + \sigma^2 + r^2$$

et ne figure plus que dans la première relation linéaire, dès lors inutile comme la condition qu'elle a fournie. On a ainsi la représentation paramétrique tangentielle de la surface de Fresnel

$$\frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2 - \sigma^2)}{r^2} - a^2 - b^2 - c^2 - \sigma^2 - r^2},$$

d'où l'on pourrait déduire celle de M. Darboux [p. 470, (25), et p. 469].

Quatrième mode de génération et *deuxième représentation paramétrique de la surface :*

Au lieu du paramètre σ, introduisons un paramètre variable τ, encore de degré 1, défini cette fois par

$$(66) \qquad b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2 = \tau^2 p^2,$$

qui ramène alors la troisième équation à

$$(67) \quad r^2(a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2) \\ = -\tau^2 p^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2) p^2 - p^2 r^2 \left[1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - \frac{\delta^2}{\rho^2}\right]$$

ou

$$a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 = p^2\left[\frac{a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 - \tau^2}{r^2} - 1 + \delta^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] \\ = p^2 \varpi(\tau, \rho, r),$$

en désignant par ϖ la fonction des variables τ, ρ, r représentée par l'accolade, et qui est cette fois du degré zéro d'homogénéité.

Ces deux équations, jointes à (60) $l^2+m^2+n^2=\frac{p^2}{r^2}$, et linéaires en l^2, m^2, n^2, se résolvent par les formules suivantes, où Δ est le même qu'au troisième mode,

$$\Delta\frac{l^2}{p^2}=\begin{vmatrix}\frac{1}{r^2} & 1 & 1\\ \varpi & b^2 & c^2\\ \tau^2 & c^2a^2 & a^2b^2\end{vmatrix}=a^2\frac{b^4-c^4}{r^2}-a^2\varpi(b^2-c^2)+\tau^2(c^2-b^2)$$

$$=(b^2-c^2)\left(a^2\frac{b^2+c^2}{r^2}-a^2\varpi-\tau^2\right).$$

Les deux membres sont bien du degré 4 d'homogénéité. On a ainsi les formules de résolution

$$(68)\quad\begin{cases}\dfrac{l}{p}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}\sqrt{a^2\dfrac{b^2+c^2}{r^2}-\tau^2-a^2\varpi(\tau,\rho,r)},\\ \dfrac{m}{p}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \dfrac{n}{p}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{cases}$$

qui, portées dans la première relation linéaire

$$\frac{\alpha_1 l}{p}+\beta_1\frac{m}{p}+\gamma_1\frac{n}{p}=-\frac{1}{\rho},$$

donnent la condition

$$(69)\quad\begin{aligned}&\alpha_1\sqrt{b^2-c^2}\sqrt{a^2\frac{b^2+c^2}{r^2}-\tau^2-a^2\varpi}\\ &+\beta_1\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{b^2\frac{c^2+a^2}{r^2}-\tau^2-b^2\varpi}\\ &+\gamma_1\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{c^2\frac{a^2+b^2}{r^2}-\tau^2-c^2\varpi}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho},\end{aligned}$$

entre les paramètres τ, ρ, ν, dont deux restent bien par suite indépendants pour la représentation de $\frac{l}{p}$, $\frac{m}{p}$, $\frac{n}{p}$.

La signification géométrique de ces trois paramètres surabondants est la suivante.

Les développables $\tau =$ const. sont circonscrites à notre surface et à des ellipsoïdes homothétiques à

$$\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{b^2a^2} + \frac{z^2}{a^2b^2} = \frac{1}{(abc)^{\frac{2}{3}}}.$$

ayant pour plans principaux les plans coordonnés.

Les développables $\rho =$ const. et $r =$ const. sont les mêmes que dans le troisième mode.

Quand δ se réduit à zéro et notre surface à celle de Fresnel, ρ disparaît de la fonction ϖ, qui se réduit à

$$\varpi = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - \tau^2}{r^2} - 1,$$

et ne figure plus que dans la première relation linéaire, dès lors inutile comme la condition qu'elle a fournie.

On a ainsi la représentation paramétrique tangentielle de la surface de Fresnel

$$\frac{l}{p} = \pm \frac{a}{\sqrt{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}} \sqrt{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right)(\tau^2 - a^2)},$$
$$\frac{m}{p} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{n}{p} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

qui ne diffère pas essentiellement de celle de la Thèse de M. Richard (p. 89).

III. — Contours apparents de la surface.

1° Sur les plans coordonnés : il suffit d'en prendre un, sur le plan des xy, les autres s'en déduisant par permutation ; c'est la trace du cylindre circonscrit parallèle à Oz ;

2° Sur le plan perpendiculaire à l'axe de dissymétrie optique $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

1° *Cylindre circonscrit parallèle à* Oz. — Il suffit de faire $n = 0$ dans l'équation tangentielle : on aura celle de la trace du cylindre sur

le plan des xy. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} o = p^4 - p^2[(b^2c^2)l^2 + (c^2 + a^2)m^2] + c^2(b^2l^2 + a^2m^2)(l^2 + m^2) \\ - \delta^2 p^2 \left[p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2\right] \end{aligned}$$

qui, pour $\delta = o$, donne bien

$$o = [p^2 - c^2(l^2 + m^2)][p^2 - (a^2m^2 + b^2l^2)],$$

c'est-à-dire le cercle et l'ellipse de section de la surface de Fresnel par ce plan qui est pour elle un plan de symétrie.

Cette courbe de quatrième classe admet l'origine pour centre, mais n'admet pas les axes Ox et Oy pour axes de symétrie.

Elle admet comme tangentes, quel que soit δ, les quatre systèmes de quatre tangentes communes aux quatre couples de coniques

$$(69\ bis)\quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = o, \\ p = o; \end{cases}$$

$$(70)\quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = o, \\ p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = o; \end{cases}$$

$$(71)\quad \begin{cases} b^2l^2 + a^2m^2 - p^2 = o, \\ p = o; \end{cases}$$

$$(72)\quad \begin{cases} b^2l^2 + a^2m^2 - p^2 = o. \\ p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - (l^2 + m^2) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = o. \end{cases}$$

Les équations (70) peuvent d'ailleurs être remplacées par

$$(70\ bis)\quad \begin{cases} c^2(l^2 + m^2) - p^2 = o, \\ p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\right) + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2 = o, \end{cases}$$

dont la seconde représente le système de deux points

$$\alpha_1 l + \beta_1 m \pm p\sqrt{-\frac{\alpha_1^2}{a^2} - \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{1 - \gamma_1^2}{c^2}}.$$

Ces quatre tangentes communes sont issues de ces deux points au cercle représenté par la première de ces deux équations.

La seconde des équations (72) représente l'ellipse projection du cercle C sur le plan des xy.

2° *Cylindre circonscrit parallèle à l'axe de dissymétrie optique* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ donnant le contour apparent sur le plan perpendiculaire. Ses équations tangentielles sont

$$\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n = 0,$$

$$0 = p^4 - p^2[(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2]$$
$$+ (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2)(l^2+m^2+n^2),$$
$$(73) \qquad - \delta^2 p^2 \left[p^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) - (l^2+m^2+n^2) \right],$$

dont la seconde est celle d'une surface (Σ), inscrite dans ce cylindre (et, par suite, le définissant), qui présente sur notre surface des ondes l'avantage d'admettre les trois plans coordonnés comme plans de symétrie, par disparition du carré $(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2$ qui détruisait la symétrie.

Cette surface est très remarquable et se prête à une étude plus facile que notre surface des ondes, dont elle constitue une sorte d'approximation et dont elle indique la forme générale, au moins dans la direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

Étude de la surface (Σ). — On peut d'abord en donner les deux représentations paramétriques que nous avons indiquées, ρ disparaissant, et avec ρ la condition surabondante.

On a, pour la première,

$$(74) \qquad \theta = a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 + \sigma^2 + r^2 \left[1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right].$$

$$(75) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{l}{p} &= \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}} \sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2-\sigma^2)}{r^2} - \theta(\sigma, r)}, \\ \frac{m}{p} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{n}{p} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

aux paramètres r et σ; et, pour la seconde,

$$(76) \qquad \varpi = \frac{a^2+b^2+c^2-\delta^2-\tau^2}{r^2} - 1 + \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right),$$

$$(77) \qquad \frac{l}{p} = \pm \frac{1}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}} \sqrt{a^2 \frac{b^2+c^2}{r^2} - \tau^2 - a^2 \varpi(\tau, r)}$$

aux paramètres r et τ.

La seconde revêt une forme assez intéressante

$$(78)\qquad \frac{l}{p} = \pm \frac{a}{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)(\tau^2-a^2)+\delta^2\left[\frac{1}{r^2}-\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]}$$

qui, pour la surface de Fresnel ($\delta = 0$), redonne celle que nous avons obtenue et rapprochée d'un résultat de M. Richard.

On peut ensuite en chercher les plans tangents singuliers en annulant les quatre dérivées partielles

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial p} = p\left\{2p^2 - [(b^2+c^2)l^2+(c^2+a^2)m^2+(a^2+b^2)n^2] + \delta^2(l^2+m^2+n^2) - 2\delta^2 p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right\},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial l} = [-(b^2+c^2)p^2 + b^2c^2(l^2+m^2+n^2) + (b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)+\delta^2p^2]\,l$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial m},\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial n}$$

par permutations circulaires de a, b, c et l, m, n.

1° Cherchons d'abord des plans tangents singuliers par l'origine $\left(p = 0 \text{ annulant } \frac{df}{dp}\right)$, ce qui empêche qu'on ait alors à la fois $l = m = n = 0$, et exige $l^2+m^2+n^2 \neq 0$ s'il s'agit de solutions réelles.

a. Alors supposons d'abord $lmn \neq 0$. $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dn} = 0$ donnent

$$b^2c^2(l^2+m^2+n^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2 = 0,$$
$$c^2a^2(l^2+m^2+n^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2 = 0,$$
$$a^2b^2(l^2+m^2+n^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2 = 0,$$

système impossible si a^2, b^2, c^2 sont différents, ce qui est notre cas général.

b. Essayons ensuite $m = n = p = 0$, $l \neq 0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial p} = 0,$$

$\frac{df}{dl}=0$ se réduit à $l\{2b^2c^2l^2\}=0$; donc impossibilité encore, et de même pour $n=l=p=0$ et $l=m=p=0$.

c. Essayons enfin $lm\neq 0$, $n=p=0$, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial p}=0.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial l}=0 \qquad \text{donne} \qquad b^2c^2(l^2+m^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial m}=0 \qquad \text{donne} \qquad c^2a^2(l^2+m^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2=0.$$

impossible en solutions réelles, et de même avec $l=0$ ou $m=0$.

2° Cherchons en second lieu des plans tangents doubles ne passant pas par l'origine ($p\neq 0$).

a. Supposons d'abord $lmn\neq 0$. Alors les quatre équations

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial m}=\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial p}=0$$

s'écrivent

$$b^2c^2(l^2+m^2+n^2)+(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)+p^2[-(b^2+c^2)+\delta^2]=0,$$
$$c^2a^2(l^2+m^2+n^2)+(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)+p^2[-(c^2+a^2)+\delta^2]=0,$$
$$a^2b^2(l^2+m^2+n^2)+(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)+p^2[-(a^2+b^2)+\delta^2]=0,$$
$$a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-(a^2+b^2+c^2-\delta^2)(l^2+m^2+n^2)$$
$$+2p^2\left[1-2\delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]=0$$

et leur déterminant, par rapport aux quatre combinaisons des inconnues

$$(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2),\quad (l^2+m^2+n^2),\quad (b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2m^2),\quad p^2,$$

se réduit à

$$-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2),\qquad \neq 0,$$

dans notre cas général; il est donc indépendant de δ, ce qui est assez remarquable. On aurait donc $p=0$, ce qui exclut ce cas.

b. Essayons ensuite $m=n=0$ ($lp\neq 0$), qui rend $\frac{\partial f}{\partial m}=\frac{\partial f}{\partial n}\equiv 0$.

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 0 \quad \text{donne} \quad + 2b^2c^2l^2 - p^2(b^2 + c^2 - \delta^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{donne} \quad -(b^2 + c^2 - \delta^2)\, l^2 + 2p^2\left[1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] = 0,$$

ce qui exige qu'on ait

$$4b^2c^2\left[1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] - (b^2 + c^2 - \delta^2)^2 = 0$$

ou

$$-(b^2 - c^2)^2 + 2\delta^2\left[b^2 + c^2 - 2b^2c^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] - \delta^4 = 0.$$

Ceci n'a rien d'absolument impossible *a priori*, même dans les hypothèses physiques, car δ, comme nous l'avons vu, peut être de l'ordre de petitesse de $b^2 - c^2$. Cela revient, avec les notations de la deuxième Partie, à supposer ν de l'ordre de ν''.

Nous avons dit toutefois que les phénomènes connus conduisaient à supposer plutôt ν'' d'ordre supérieur à ν, c'est-à-dire $b^2 - c^2$ d'ordre supérieur à δ, auquel cas le terme principal de la condition ci-dessus deviendrait le second et entraînerait la conséquence

$$\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)(\beta_1^2 - \gamma_1^2) = 0.$$

C'est un cône de directions à donner à l'axe de dissymétrie pour réaliser cette singularité.

En revenant à l'hypothèse la plus générale sur a, b, c, δ, on voit que la présence des trois couples de plans tangents singuliers parallèles à Oyz, Ozx, Oxy exigerait qu'on eût

$$-(b^2 - c^2)^2 + 2\delta^2\left[b^2 + c^2 - 2b^2c^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] - \delta^4 = 0,$$

$$-(c^2 - a^2)^2 + 2\delta^2\left[c^2 + a^2 - 2c^2a^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{\beta^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] - \delta^4 = 0,$$

$$-(a^2 - b^2)^2 + 2\delta^2\left[a^2 + b^2 - 2a^2b^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] - \delta^2 = 0.$$

Ceci exige l'égalité du quotient

$$\frac{-(c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2}{(c^2 - b^2)\left[1 - 2a^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right]}$$

et des deux qu'on en déduit par permutations circulaires.

On devrait donc avoir

$$\frac{1-\dfrac{b^2+c^2}{2a^2}}{\dfrac{1}{2a^2}-\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}=\frac{1-\dfrac{c^2+a^2}{2b^2}}{\dfrac{1}{2b^2}-\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}=\frac{1-\dfrac{a^2+b^2}{2c^2}}{\dfrac{1}{2c^2}-\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}$$

ou

$$\frac{2a^2-b^2-c^2}{1-2a^2\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}=\frac{2b^2-c^2-a^2}{1-2b^2\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}$$

$$=\frac{3(a^2-b^2)}{2(b^2-a^2)\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}=-\frac{3}{2\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)}$$

relation qui, étant symétrique, fournit la valeur commune des trois rapports.

Il vient donc

$$0=2(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}-\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)-3(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2),$$

ce qui est un cône symétrique et, par suite, donne une condition unique.

Une autre est fournie par le résultant de deux des équations en δ, qui suffit, comme il est facile de s'en assurer, et qui donne un autre cône assez compliqué dont je ne m'arrête pas à écrire l'équation.

Il faudra donc prendre pour l'axe de dissymétrie une génératrice commune à ces deux cônes, et pour valeur du coefficient δ de dissymétrie la racine commune aux trois équations bicarrées.

c. Essayons enfin $n=0$ (avec $lmp\neq 0$) qui rend $\dfrac{df}{dn}=0$.

Alors $\dfrac{df}{dl}=\dfrac{df}{dm}=\dfrac{df}{dp}=0$ donnent

$$b^2c^2(l^2+m^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2-p^2(b^2+c^2-\delta^2)=0,$$
$$c^2a^2(l^2+m^2)+b^2c^2l^2+c^2a^2m^2-p^2(c^2+a^2-\delta^2)=0,$$
$$-(b^2+c^2)l^2-(c^2+a^2)m^2+\delta^2(l^2+m^2)-2\left[\delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\beta_1^2}{b^2}+\frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)-1\right]p^2=0,$$

qui admettent, comme déterminant à annuler par rapport à l^2, m^2, p^2,

$$=\begin{vmatrix} 2b^2c^2 & c^2(a^2+b^2) & b^2+c^2-\delta^2 \\ c^2(a^2+b^2) & 2c^2a^2 & c^2+a^2-\delta^2 \\ b^2+c^2-\delta^2 & c^2+a^2-\delta^2 & 2\left[1-\delta^2\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\right] \end{vmatrix}.$$

On vérifie que les termes indépendants de δ s'annulent ainsi que les termes en δ^4 et il reste, au facteur $2c^2\delta^2$ près,

$$0 = (a^2 - b^2)^2 \left[1 - c^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] = 0.$$

Ces plans tangents doubles existeront donc, parallèles à Oz, et donnés par les solutions l, m, p des équations linéaires dès lors compatibles, si l'axe de dissymétrie optique vérifie la relation

$$0 = \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{c^2} - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) = 0,$$

c'est-à-dire est dans l'un des deux plans

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \alpha_1^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \beta_1^2 = 0$$

qui sont deux plans cycliques de l'ellipsoïde

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En faisant les deux permutations circulaires consécutives, on voit que, pour l'existence de cette catégorie de plans tangents doubles, *il suffit que l'axe de perturbation optique soit dans l'un des plans cycliques de l'ellipsoïde.*

d. Le plan $l = m = n = 0$, $p \neq 0$, c'est-à-dire le plan de l'infini, donne $\frac{df}{dl} = \frac{df}{dm} = \frac{df}{dn} = 0$, mais $\frac{df}{dp} = 0$ devient

$$1 - \delta^2 \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) = 0.$$

Il faudrait, pour qu'il fût singulier (ce qui n'a d'ailleurs pas d'intérêt au point de vue physique), que l'axe de dissymétrie δ fût égal à la longueur du diamètre de l'ellipsoïde $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$, qui a sa propre direction, *c'est-à-dire que l'extrémité de cet axe fût un point de l'ellipsoïde.*

Mais ce cas est impossible physiquement, comme donnant une racine ω^2 infinie de l'équation aux vitesses.

IV. — Équation différentielle des lignes de courbure.

Appliquons l'équation (16) (p. 240 de M. Darboux) ([1]) au cas où $u = l$, $v = m$, $w = n$, $p = 1$, $h = \alpha = \frac{1}{r}$. Elle devient (β étant σ ou τ suivant le mode de représentation choisi, où α et β sont les paramètres des courbes coordonnées)

$$\begin{vmatrix} l & \frac{\partial l}{\partial \alpha} & \frac{\partial l}{\partial \beta} & d\frac{\partial l}{\partial \alpha} & d\frac{\partial l}{\partial \beta} \\ m & \frac{\partial m}{\partial \alpha} & \frac{\partial m}{\partial \beta} & d\frac{\partial m}{\partial \alpha} & d\frac{\partial m}{\partial \beta} \\ n & \frac{\partial n}{\partial \alpha} & \frac{\partial n}{\partial \beta} & d\frac{\partial n}{\partial \alpha} & d\frac{\partial n}{\partial \beta} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(79) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial \beta} & d\frac{\partial l}{\partial \alpha} & d\frac{\partial l}{\partial \beta} \\ \frac{\partial m}{\partial \beta} & d\frac{\partial m}{\partial \alpha} & d\frac{\partial m}{\partial \beta} \\ \frac{\partial n}{\partial \beta} & d\frac{\partial n}{\partial \alpha} & d\frac{\partial n}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Par exemple, pour le premier mode,

$$l^2 = \frac{1}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}\left[a^2(b^2 + c^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta\left(\sigma, \rho, \frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

$$\theta = a^2 + b^2 + c^2 - \delta^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha^2}\left[1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)\right],$$

avec la condition

$$\alpha_1\sqrt{b^2 - c^2}\sqrt{a^2(b^2 + c^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta} + \beta_1\sqrt{c^2 - a^2}\sqrt{b^2(c^2 + a^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta}$$
$$+ \gamma_1\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{c^2(a^2 + b^2 - \beta^2)\alpha^2 - \theta} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{\rho},$$

$$\Delta = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2).$$

Ces résultats se simplifient pour la surface de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie.

([1]) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I.

Je prends le deuxième mode de représentation $\left(\tau = \beta, \frac{1}{r} = \alpha\right)$ à cause de sa forme plus symétrique

$$l^2 = \frac{a^2}{(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)} \left\{ \alpha^2 \beta^2 - \frac{\beta^2}{a^2} + 1 + \delta^2 \left[\alpha^2 - \left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2} \right) \right] \right\},$$

qu'on peut écrire

$$l^2 = A_0 + A_1 \alpha^2 + A_2 \beta^2 + A_3 \alpha^2 \beta^2.$$

d'où

$$l \frac{\partial l}{\partial \alpha} = A_1 \alpha + A_3 \alpha \beta^2, \qquad l \frac{\partial l}{\partial \beta} = A_2 \beta + A_3 \alpha^2 \beta.$$

$$l d \frac{\partial l}{\partial \alpha} + \frac{\partial l}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial l}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial l}{\partial \beta} d\beta \right) = (A_1 + A_3 \beta^2) d\alpha + 2 A_3 \alpha \beta d\beta.$$

Et, par échange de α et β, A_1 et A_2,

$$l^3 d \frac{\partial l}{\partial \beta} = (A_2 + A_3 \alpha^2)(A_0 + A_1 \alpha^3) d\beta + \alpha \beta\, d\alpha (A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2).$$

Alors l'équation différentielle des lignes de courbure, écrite lignes en colonnes, sera

$$\begin{vmatrix} l^2 \frac{\partial l}{\partial \beta} & m^3 \frac{\partial m}{\partial \beta} & n^3 \frac{\partial n}{\partial \beta} \\ l^3 d \frac{\partial l}{\partial \alpha} & m^3 d \frac{\partial m}{\partial \alpha} & n^3 d \frac{\partial n}{\partial \alpha} \\ l^3 d \frac{\partial l}{\partial \beta} & m^3 d \frac{\partial m}{\partial \beta} & n^3 d \frac{\partial n}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(80) \quad \begin{vmatrix} l^3 \beta (A_2 \beta + A_3 \alpha^2) \\ (A_1 + A_3 \beta^2)(A_0 + A_2 \beta^2) d\alpha + \alpha \beta d\beta [A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2] & \ldots \\ (A_2 + A_3 \alpha^2)(A_0 + A_1 \alpha^2) d\beta + a \beta d\alpha [A_0 A_3 - A_1 A_2 + A_3 l^2] & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

les autres colonnes se déduisant de la première par permutation de l, m, n, A, B, C, ...

Le facteur commun $\beta = 0$ donne une solution $\tau = 0$ imaginaire à écarter.

V. — Plans tangents singuliers.

Reprenons l'équation tangentielle de la surface $f = F - \delta^2 p^2 C = 0$ et cherchons les plans tangents singuliers par les équations telles que

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 0 = \frac{\partial F}{\partial l} - \delta^2 \frac{\partial}{\partial l} (p^2 C) = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial F}{\partial l}$ ont été calculées pour la même étude faite sur la surface (Σ) de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie optique

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial l}(p^2 C) = \frac{1}{2}p^2\frac{\partial C}{\partial l} = p^2[-l + \alpha_1(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)]$$

et $\frac{\partial}{\partial m}$ et $\frac{\partial}{\partial n}$ par permutations circulaires

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2 C) = pC + p^3\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right).$$

I. Cherchons d'abord des plans tangents doubles par l'origine ($p = 0$). Les équations se réduisent alors à celles que nous avons obtenues pour la surface de contour apparent parallèle à l'axe de dissymétrie optique, et les conclusions sont les mêmes.

II. Cherchons en second lieu des plans tangents doubles ne passant pas par l'origine ($p \neq 0$).

1° Essayons d'abord $m = n = 0$, $lp \neq 0$ (ou les autres analogues par permutations).

Ici nous n'avons plus $\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = 0$; mais comme $\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\partial F}{\partial n} = 0$, il reste

$$\alpha_1\beta_1 = 0;$$
$$\alpha_1\gamma_1 = 0.$$

Si $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, l'axe de dissymétrie coïnciderait avec l'un des axes $Oxyz$, c'est l'étude de la deuxième Partie. Si $\alpha_1 = 0$, c'est l'hypothèse (β) plus loin.

2° Essayons ensuite $n = 0$, $lmp \neq 0$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ exige qu'on ait $\gamma_1(\alpha_1 l + \beta_1 m) = 0$.

α. La solution

$$\frac{l}{\beta_1} = \frac{m}{-\alpha_1} = \frac{n}{0} = \frac{p}{1},$$

annulant la parenthèse, ramène à la surface de contour apparent, en faisant disparaître $\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n$, dans le cas ($c$). Il faudrait donc d'abord, comme on l'a obtenu là, que l'axe de dissymétrie optique fût dans l'un des plans cycliques de l'ellipsoïde, et ensuite que les équations linéaires, alors compatibles, fussent vérifiées par les valeurs

ci-dessus de l, m, n, p, ce qui entraîne entre les données a, b, c et l'axe de dissymétrie $\delta(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ des conditions que je ne m'arrête pas à écrire.

β. L'hypothèse $\gamma_1 = 0$, où l'axe de dissymétrie serait dans l'un des plans coordonnés $Oxyz$, ne simplifie pas considérablement les calculs; je ne la traite pas, on la déduirait comme cas particulier de ce que nous allons dire sous un numéro suivant (4°).

3° Le plan $l = m = n = 0$, $p \neq 0$, c'est-à-dire le plan de l'infini, donne

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial f}{\partial n} = 0.$$

Mais $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$ devient encore

$$1 - \delta^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) = 0,$$

l'extrémité de l'axe de dissymétrie doit être sur l'ellipsoïde.

Nous avons remarqué que c'était physiquement impossible.

4° Enfin le cas général $lmnp \neq 0$ redonne les équations du cas 2° (α) du contour apparent, mais embarrassées de termes en $(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)$ qui en compliquent considérablement la discussion. Elles s'écrivent ainsi

$$0 = l\left\{-(b^2+c^2)p^2 + b^2c^2(l^2+m^2+n^2) + (b^2c^2l^2 + c^2a^2m^2 + a^2b^2n^2) \right.$$
$$\left. - \delta^2p^2[-l + \alpha_1(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)]\right\} = 0,$$

deux autres obtenues par permutation circulaire de (l, m, n) $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ et enfin la quatrième

$$0 = \left\{2p^2 - [(b^2+c^2)l^2 + (c^2+a^2)m^2 + (a^2+b^2)n^2] \right.$$
$$\left. - 2\delta^2p^2\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right) + \delta^2(l^2+m^2+n^2) - \delta^2(\alpha_1 l + \beta_1 m + \gamma_1 n)^2\right\}.$$

Cette discussion pourra être utilement faite le jour où l'expérience aura montré, entre les constantes, des relations qui la simplifient.

Je vais seulement montrer comment elle pourrait être abordée dans le cas où, δ étant considéré comme infiniment petit, on étudierait les singularités de cette surface comme voisine de celle de Fresnel.

Écrivons pour un moment ces équations

$$f_i - \delta^2\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Appelons $(l, m, n, 1)$ une solution des $f_i = 0$, c'est-à-dire un plan tangent singulier de la surface de Fresnel. Appelons

$$(l + \delta^2 l_1,\ m + \delta^2 m_1,\ n + \delta^2 n_1,\ 1)$$

une solution des $f_i - \delta^2 \varphi_i = 0$, c'est-à-dire un plan tangent singulier de notre surface.

Alors le développement de Taylor, limité au premier terme, de l'équation

$$f_i - \delta^2 \varphi_i = 0,$$

donne

$$f_i(l, m, n, 1) + \delta^2 \left(l_1 \frac{\partial f_i}{\partial l} + m_1 \frac{\partial f_i}{\partial m} + n_1 \frac{\partial f_i}{\partial n} \right) - \delta^3 \varphi_i(l, m, n) = 0.$$

ou, puisque l, m, n sont des solutions de $f_i = 0$,

$$l_1 \frac{\partial f_i}{\partial l} + m_1 \frac{\partial f_i}{\partial m} + n_1 \frac{\partial f_i}{\partial n} - \varphi_i(l, m, n) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

S'il y a des plans tangents doubles, les termes correctifs l, m, n, l_1, m_1, n_1 devront être racines de ces *quatre* équations, ce qui donne une condition de compatibilité

$$(81) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l} & \frac{\partial f_1}{\partial m} & \frac{\partial f_1}{\partial n} & \varphi_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial l} & \frac{\partial f_2}{\partial m} & \frac{\partial f_2}{\partial n} & \varphi_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial l} & \frac{\partial f_3}{\partial m} & \frac{\partial f_3}{\partial n} & \varphi_3 \\ \frac{\partial f_4}{\partial l} & \frac{\partial f_4}{\partial m} & \frac{\partial f_4}{\partial n} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Par exemple, en prenant le plan tangent singulier qui, avec les notations actuelles appliquées aux formules de la page 20 de M. Richard, est

$$l = \frac{\sqrt{-1}}{c} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}}, \qquad m = \frac{\sqrt{-1}}{c} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}} \qquad (n = 0,\ p = 1).$$

$$f_1 = [-(b^2 + c^2) + b^2 c^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2]\ l = l g_1.$$
$$f_2 = [-(c^2 + a^2) + c^2 a^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2]\, m = m g_2,$$
$$f_3 = [-(a^2 + b^2) + a^2 b^2 (l^2 + m^2 + n^2) + b^2 c^2 l^2 + c^2 a^2 m^2 + a^2 b^2 n^2]\, n,$$
$$f_4 = 2 - [(b^2 + c^2) l^2 + (c^2 + a^2) m^2 + (a^2 + b^2) n^2].$$

La troisième colonne du déterminant (81) se réduit à son troisième terme $\neq 0$, et le déterminant à son mineur

$$(82) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial l} & \dfrac{\partial f_1}{\partial m} & \varphi_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial l} & \dfrac{\partial f_2}{\partial m} & \varphi_2 \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial l} & \dfrac{\partial f_4}{\partial m} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$\frac{\partial f_1}{\partial l} = g_1 + l\frac{\partial g_1}{\partial l}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial m} = l\frac{\partial g_1}{\partial m},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial l} = + m\frac{\partial g_2}{\partial l}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial m} = g_2 + m\frac{\partial g_2}{\partial m},$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial l} = -2(b^2+c^2)l. \qquad \frac{\partial f_4}{\partial m} = -2(c^2+a^2)m.$$

Mais ici

$$g_1 = -(b^2+c^2) + b^2 + c^2 = 0,$$

$$g_2 = -(c^2+a^2) + a^2 + c^2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} l\dfrac{\partial g_1}{\partial l} & l\dfrac{\partial g_1}{\partial m} & \varphi_1 \\ m\dfrac{\partial g_1}{\partial m} & m\dfrac{\partial g_2}{\partial m} & \varphi_2 \\ \dfrac{\partial f_4}{\partial l} & \dfrac{\partial f_4}{\partial m} & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial l} = 4b^2c^2 l, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial m} = 2c^2(a^2+b^2)m,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial l} = 2c^2(a^2+b^2)l, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial m} = 4c^2a^2m.$$

La condition s'écrit donc ainsi :

$$\begin{vmatrix} 2b^2c^2 l & c^2(a^2+b^2)l & -l(\beta_1^2+\gamma_1^2) + m\alpha_1\beta_1 \\ c^2(a^2+b^2)m & 2c^2a^2m & -m(\alpha_1^2+\gamma_1^2) + l\,\alpha_1\beta_1 \\ -(b^2+c^2) & -(c^2+a^2) & 2\left(\dfrac{\alpha_1^2}{a^2}+\dfrac{\beta_1^2}{b^2}+\dfrac{\gamma_1^2}{c^2}\right) - \dfrac{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}{c^2} + (\alpha_1 l + \beta_1 m)^2, \end{vmatrix} = 0.$$

On divisera la première ligne par l, la deuxième par m.

Les coefficients des éléments de la dernière colonne sont respectivement, en divisant par $c^4(a^2-b^2)$,

$$\frac{c^2-a^2}{c^2}, \quad \frac{b^2-c^2}{c^2}, \quad -(a^2-b^2).$$

Le coefficient de γ_1^2 disparaissant, *on voit que le cône*, sur lequel doit se trouver l'axe de dissymétrie pour que le plan tangent singulier existe, *se réduit à deux plans passant par* O z.

CHAPITRE V.

CAS DES ONDES PLANES LATÉRALEMENT LIMITÉES.

En nous reportant au paragraphe IV (n° 19) du Mémoire de M. Boussinesq (p. 335) [1], nous voyons que le rayon lumineux, supposé latéralement limité pour rentrer dans le cas de la réalité, mais assez large pour ne pas présenter de diffraction sensible, se prêtera à l'étude précédente, pourvu que L'I, M'I, N'I subissent trois corrections *imaginaires* ε, ε_1, ε_2, de l'ordre des dérivées partielles $\frac{dI}{dx}$, $\frac{dI}{dy}$, $\frac{dI}{dz}$, I étant maintenant une fonction lentement variable de x, y, z, dont les dérivées secondes seraient encore beaucoup plus petites que ces dérivées premières. Ce sont donc les expressions

$$\frac{\xi}{L'I+\varepsilon} = \frac{\eta}{M'I+\varepsilon_1} = \frac{\zeta}{N'I+\varepsilon_2} = e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}} = E,$$

que nous substituons dans les mêmes équations du mouvement. Dans ces expressions, L', M', N' conservent leurs valeurs constantes du cas des ondes planes latéralement indéfinies.

Les termes εE, ε_1E, ε_2E donneront, d'après le calcul du Chapitre I, les produits de E par

$$\Phi\varepsilon+X\varepsilon_1+\Psi\varepsilon_2, \qquad \Phi_1\varepsilon+X_1\varepsilon_1+\Psi_1\varepsilon_2, \qquad \Phi_2\varepsilon+X_2\varepsilon_1+\Psi_2\varepsilon_2.$$

En effet, ε, ε_1, ε_2 étant déjà de l'ordre de petitesse des dérivées premières de I, les dérivations de ε, ε_1, ε_2 par rapport à x, y, z n'introduiraient que des termes de l'ordre supérieur de petitesse des dérivées secondes de I.

Dans les autres termes, la dérivation par rapport à x du produit L'IE le multipliera par

$$-kl\sqrt{-1}+\frac{1}{I}\frac{dI}{dx} = -k\sqrt{-1}\left(l+\frac{1}{kI}\frac{dI}{dx}\sqrt{-1}\right).$$

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 6e série, t. VII, 1911.

Cette dérivation reviendra donc à donner à l un accroissement qu'on peut représenter par

$$\partial l = \frac{1}{\mathrm{KI}} \frac{d\mathrm{I}}{dx} \sqrt{-1}.$$

Mais, les dérivées partielles $\frac{d\mathrm{I}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{I}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{I}}{dz}$ étant petites, et chacune d'elles n'éprouvant des changements comparables à sa valeur qu'après un grand nombre de longueurs d'onde, leurs propres dérivées seront d'ordre supérieur de petitesse, et elles-mêmes pourront être traitées comme des constantes dans notre calcul. On pourra d'ailleurs traiter

$$\partial l = \frac{1}{\mathrm{KI}} \frac{d\mathrm{I}}{dx} \sqrt{-1}, \qquad \partial m = \frac{1}{\mathrm{KI}} \frac{d\mathrm{I}}{dy} \sqrt{-1}, \qquad \partial n = \frac{1}{\mathrm{KI}} \frac{d\mathrm{I}}{dz} \sqrt{-1},$$

en raison de la petitesse de $\frac{d\mathrm{I}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{I}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{I}}{dz}$, comme de véritables différentielles, et, dans les résultats de la substitution que nous effectuons, les neuf polynomes $\Phi, \ldots, \Psi_2$ seront accrus de leurs différentielles totales $\partial\Phi, \ldots, \partial\Psi_2$. Ces résultats fourniront donc les trois équations

$$\begin{aligned}
\Phi\,\varepsilon + \mathrm{X}\,\varepsilon_1 + \Psi\,\varepsilon_2 + \mathrm{L'I}(\Phi + \partial\Phi) + \mathrm{M'I}(\mathrm{X} + \partial\mathrm{X}) + \mathrm{N'I}(\Psi + \partial\Psi) = 0,\\
\Phi_1\varepsilon + \mathrm{X}_1\varepsilon_1 + \Psi_1\varepsilon_2 + \mathrm{L'I}(\Phi_1 + \partial\Phi_1) + \mathrm{M'I}(\mathrm{X}_1 + \partial\mathrm{X}_1) + \mathrm{N'I}(\Psi_1 + \partial\Psi_1) = 0,\\
\Phi_2\varepsilon + \mathrm{X}_2\varepsilon_1 + \Psi_2\varepsilon_2 + \mathrm{L'I}(\Phi_2 + \partial\Phi_2) + \mathrm{M'I}(\mathrm{X}_2 + \partial\mathrm{X}_2) + \mathrm{N'I}(\Psi_2 + \partial\Psi_2) = 0.
\end{aligned}$$

Appelons λ', μ', ν' les trois multiplicateurs, définis à un facteur près et fonctions de l, m, n, qui vérifient le système homogène

$$\begin{aligned}
\lambda'\Phi + \mu'\Phi_1 + \nu'\Phi_2 = 0,\\
\lambda'\mathrm{X} + \mu'\mathrm{X}_1 + \nu'\mathrm{X}_2 = 0,\\
\lambda'\Psi + \mu'\Psi_1 + \nu'\Psi_2 = 0,
\end{aligned}$$

compatible à cause de la condition

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Phi_1 & \Phi_2 \\ \mathrm{X} & \mathrm{X}_1 & \mathrm{X}_2 \\ \Psi & \Psi_1 & \Psi_2 \end{vmatrix} = 0$$

ou $f(a, b, c, l, m, n) = 0$, que nous supposons vérifiée, et qui n'est autre que la condition (41) du Chapitre I (troisième Partie), les lignes étant échangées avec les colonnes. Il en résulte aussi que pour λ', μ', ν' on peut prendre les expressions imaginaires conjuguées de L', M', N', d'après une remarque faite à la fin du Chapitre I.

Alors, en multipliant par λ', μ', ν' les équations et les ajoutant, on

obtient, après suppression du facteur I,

$$(\lambda' \partial\Phi + \mu' \partial\Phi_1 + \nu' \partial\Phi_2) L' + (\lambda' \partial X + \mu' \partial X_1 + \nu' \partial X_2) M' \\ + (\lambda' \partial \Psi + \mu' \partial \Psi_1 + \nu' \partial \Psi_2) N' = 0.$$

Dans cette équation, on a

$$\partial\Phi = \frac{d\Phi}{dl}\partial l + \frac{d\Phi}{dm}\partial m + \frac{d\Phi}{dn}\partial n,$$

. . . .

Elle devient donc

$$\begin{aligned}
&\Big[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dl} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dl}\right)\partial l \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm}\right)\partial m + \left(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn}\right)\partial n\Big] L' \\
&+ \Big[\left(\lambda' \frac{dX}{dl} + \mu' \frac{dX_1}{dl} + \nu' \frac{dX_2}{dl}\right)\partial l \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm}\right)\partial m + \left(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn}\right)\partial n\Big] M' \\
&+ \Big[\left(\lambda' \frac{d\Psi}{dl} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dl}\right)\partial l \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm}\right)\partial m + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn}\right)\partial n\Big] N' = 0
\end{aligned}$$

avec

$$\partial l = \frac{\sqrt{-1}}{KI}\frac{dI}{dx}, \qquad \partial m = \frac{\sqrt{-1}}{KI}\frac{dI}{dy}, \qquad \partial n = \frac{\sqrt{-1}}{KI}\frac{dI}{dz}$$

ou, en ordonnant par rapport à ces dérivées, c'est-à-dire en colonnes,

$$\begin{aligned}
&\Big[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dl} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dl}\right) L' \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{dX}{dl} + \mu' \frac{dX_1}{dl} + \nu' \frac{dX_2}{dl}\right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dl} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dl}\right) N'\Big]\frac{dI}{dx} \\
&+ \Big[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm}\right) L' \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm}\right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm}\right) N'\Big]\frac{dI}{dy} \\
&+ \Big[\left(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn}\right) L' \\
&\quad + \left(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn}\right) M' + \left(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn}\right) N'\Big]\frac{dI}{dz} = 0
\end{aligned}$$

ou enfin

$$P\frac{dI}{dx} + Q\frac{dI}{dy} + R\frac{dI}{dz} = 0,$$

P, Q, R représentant les trois crochets.

Mais entre les neuf polynomes Φ, ..., Ψ_2 nous avons établi la relation

$$f(a, b, c, l, m, n) = 0,$$

qui n'est autre que l'équation tangentielle de la surface des ondes, et dont la différentielle totale serait

$$\frac{df}{dl}\partial l + \frac{df}{dm}\partial m + \frac{df}{dn}\partial n = 0.$$

Or, je dis qu'on a précisément,

$$\frac{\frac{df}{dl}}{P} = \frac{\frac{df}{dm}}{Q} = \frac{\frac{df}{dn}}{R}.$$

En effet, pour effectuer cette différentiation, il est inutile de former explicitement F : il suffit de différentier totalement les trois équations linéaires et homogènes dont $F = 0$ exprime la compatibilité. Il s'agit ici de différentielles effectives et non plus symboliques, et il vient

$$\Phi\, dL' + X\, dM' + \Psi\, dN' + L'\, d\Phi + M'\, dX + N'\, d\Psi = 0,$$
$$\Phi_1\, dL' + X_1 dM' + \Psi_1 dN' + L'\, d\Phi_1 + M'\, dX_1 + N'\, d\Psi_1 = 0,$$
$$\Phi_2\, dL' + X_2 dM' + \Psi_2 dN' + L'\, d\Phi_2 + M'\, dX_2 + N'\, d\Psi_2 = 0.$$

Ces équations, multipliées par λ', μ', ν', définies plus haut et ajoutées, donnent, par évanouissement des trois premières colonnes,

$$(\lambda'\, d\Phi + \mu'\, d\Phi_1 + \nu'\, d\Psi_2)L'$$
$$+ (\lambda'\, dX + \mu'\, dX_1 + \nu'\, dX_2)M' + (\lambda'\, d\Psi + \mu'\, d\Psi_1 + \nu'\, d\Psi_2)N' = 0,$$

avec

$$d\Phi = \frac{d\Phi}{dl}dl + \frac{d\Phi}{dm}dm + \frac{d\Phi}{dn}dn,$$

. . . .

Cette équation devient donc

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big(\lambda' \frac{d\Phi}{dl} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dl}\Big) L' \\
&\quad + \Big(\lambda' \frac{dX}{dl} + \mu' \frac{dX_1}{dl} + \nu' \frac{dX_2}{dl}\Big) M + \Big(\lambda' \frac{d\Psi}{dl} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dl} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dl}\Big) N \Big] dl \\
&+ \Big[+\Big(\lambda' \frac{d\Phi}{dm} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dm}\Big) L' \\
&\quad + \Big(\lambda' \frac{dX}{dm} + \mu' \frac{dX_1}{dm} + \nu' \frac{dX_2}{dm}\Big) M' + \Big(\lambda' \frac{d\Psi}{dm} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dm} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dm}\Big) N' \Big] dm \\
&+ \Big[+\Big(\lambda' \frac{d\Phi}{dn} + \mu' \frac{d\Phi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Phi_2}{dn}\Big) L' \\
&\quad + \Big(\lambda' \frac{dX}{dn} + \mu' \frac{dX_1}{dn} + \nu' \frac{dX_2}{dn}\Big) M' + \Big(\lambda' \frac{d\Psi}{dn} + \mu' \frac{d\Psi_1}{dn} + \nu' \frac{d\Psi_2}{dn}\Big) N \Big] dn = 0.
\end{aligned}$$

ou enfin

$$P\,dl + Q\,dm + R\,dn = 0$$

comme nous l'avions annoncé, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{df}{dl}}{P} = \frac{\frac{df}{dm}}{Q} = \frac{\frac{df}{dn}}{R}.$$

Or le point de contact (x, y, z) du plan de l'onde avec son enveloppe est précisément donné, sur l'équation tangentielle, par

$$\frac{x}{\frac{df}{dl}} = \frac{y}{\frac{df}{dm}} = \frac{z}{\frac{df}{dn}},$$

ou

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R}.$$

Si nous considérons par suite un élément de chemin $(\partial x, \partial y, \partial z)$ à partir de l'origine le long du rayon vecteur de ce point de contact, nous aurons

$$\frac{\partial x}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{\partial z}{R},$$

et, sur cet élément, l'équation

$$P\frac{dI}{dx} + Q\frac{dI}{dy} + R\frac{dI}{dz} = 0$$

deviendra

$$\frac{dI}{dx}\partial x + \frac{dI}{dy}\partial y + \frac{dI}{dz}\partial z = 0 \qquad (\partial I = 0).$$

C'est l'équation (57) de la page 339 du Mémoire de M. Boussinesq.

Donc, quelle que soit la manière graduelle dont varie la fonction I d'un point à l'autre d'une même onde plane, cette fonction ne variera pas le long du rayon vecteur joignant le centre de la surface des ondes au point de contact de cette surface avec l'onde plane, et c'est suivant ce rayon vecteur que se *transmettra l'amplitude du mouvement :* c'est la propriété caractéristique du *rayon correspondant de lumière parallèle*.

Nous avons donc étendu, au cas général qui nous occupe, malgré la présence des trois coefficients ν, ν_1, ν_2 (représentant un ordre de phénomènes analogue à la polarisation rotatoire magnétique), la conclusion de ce Mémoire :

Les équations du mouvement n'astreignent le coefficient I *d'amplitude qu'à rester invariable le long de chaque rayon lumineux* (rayon vecteur du point de contact du plan de l'onde avec son enveloppe, la surface des ondes).

MÉDAILLE WEIERSTRASS (1916).

Au cinquième Congrès international des Mathématiciens, à Cambridge, il fut décidé que le sixième Congrès se réunirait en 1916 à Stockholm. Sa Majesté le Roi Gustave V fit annoncer, à cette occasion, qu'il serait disposé à mettre ce Congrès sous son haut patronage.

En outre, Sa Majesté a résolu d'honorer, par une médaille d'or portant l'image de Karl Weierstrass et par une somme d'argent de 3000 couronnes, quelque importante découverte dans le domaine de la théorie des fonctions analytiques.

Ceux qui désireront concourir pour ce prix devront envoyer leurs manuscrits au rédacteur en chef des *Acta mathematica* avant le 31 octobre 1915, centenaire de la naissance de Karl Weierstrass. Les Mémoires, qui pourront traiter un sujet se rapportant soit à la théorie générale des fonctions analytiques, soit à la théorie d'une classe importante de fonctions particulières, devront porter une épigraphe et être accompagnés du nom et de l'adresse de l'auteur, indiqués ouvertement ou sous pli cacheté. Ils ne devront point avoir été publiés antérieurement.

Sa Majesté a décidé qu'un rapport sur la valeur scientifique des Mémoires envoyés pour répondre à la question mise au concours doit être présenté à Sa Majesté par les membres de la première classe de l'Académie des Sciences de Suède. Ces membres sont actuellement : MM. Mittag-Leffler, Falk, Phragmén, Wiman, Bendixson et von Koch. Aux dits membres sera encore associé M. Fredholm.

Le Mémoire couronné ainsi que les Mémoires qui pourraient être jugés dignes d'être signalés comme particulièrement remarquables seront imprimés dans les *Acta mathematica*. Ils ne devront pas être autrement rendus publics antérieurement.

Les autres Mémoires seront renvoyés à l'adresse que l'auteur aura indiquée dans ce but.

Les Mémoires pourront être écrits en allemand, en anglais ou en français, au choix de l'auteur.

Des polynomes invariants par une substitution linéaire;

Par Camille JORDAN.

I. Une substitution linéaire S peut être mise sous la forme canonique

$$S = \begin{vmatrix} x_m & x_{m-1} & \dots & x_0, & a(x_m + x_{m-1}) & a(x_{m-1} + x_{m-2}) & \dots & ax_0 \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_0, & b(y_n + y_{n-1}) & b(y_{n-1} + y_{n-2}) & \dots & by_0 \\ z_p & z_{p-1} & \dots & z_0, & c(z_p + z_{p-1}) & c(z_{p-1} + z_{p-2}) & \dots & cz_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

les constantes a, b, c, ... étant égales ou inégales.

Elle est le produit des deux substitutions suivantes :

$$S_1 = \begin{vmatrix} x_m & \dots & x_0, & ax_m & \dots & ax_0 \\ y_n & \dots & y_0, & by_n & \dots & by_0 \\ \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} x_m & \dots & x_0, & x_m + x_{m-1} & \dots & x_0 \\ y_n & \dots & y_0, & y_n + y_{n-1} & \dots & y_0 \\ \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Soit, d'autre part, F un polynome où figurent les variables de S. Désignons par $F_{\lambda\mu\nu\dots}$ l'ensemble de ceux de ses termes qui sont de degré λ par rapport aux variables x, de degré μ par rapport aux variables y, de degré ν par rapport aux variables z, etc.

La substitution S étant linéaire par rapport à chacune des séries de variables, transformera $F_{\lambda\mu\nu\dots}$ en une autre forme $G_{\lambda\mu\nu\dots}$ également homogène et de degré λ par rapport aux x, homogène et de degré μ par rapport aux y, etc.

Pour que le polynome $F = \Sigma F_{\lambda\mu\nu\dots}$ soit identique à son transformé

$G = \Sigma G_{\lambda\mu\nu\ldots}$, il faut qu'on ait pour chaque système des valeurs de λ, μ, ν, ...

$$F_{\lambda\mu\nu\ldots} = G_{\lambda\mu\nu\ldots},$$

car aucune réduction n'est possible entre des termes pour lesquels λ, μ, ν, ... ont des valeurs différentes.

La construction des polynomes invariants est ainsi ramenée au cas des formes homogènes séparément par rapport à chacune des séries de variables x, y, z, ...

Si nous désignons par D l'opération

$$x_{m-1}\frac{\partial}{\partial x_m} + x_{m-2}\frac{\partial}{\partial x_{m-1}} + \ldots + x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + y_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_n} + \ldots + y_0\frac{\partial}{\partial y_1} + z_{p-1}\frac{\partial}{\partial z_p} + \ldots + z_0\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots,$$

nous aurons pour $G_{\lambda\mu\nu\ldots}$ le développement symbolique

$$G_{\lambda\mu\nu\ldots} = a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots \left(1 + D + \frac{D^2}{1.2} + \ldots + \frac{D^k}{1.2\ldots k} + \ldots\right) F_{\lambda\mu\nu}.$$

Convenons d'assigner à chacune des variables x, y, z, ... un poids égal à son indice. L'opération D, effectuée sur un monome T de poids p, donne pour résultat une somme de termes de poids $p - 1$.

Soit donc $F_{\lambda\mu\nu\ldots} = \Phi + \Psi$, Φ désignant l'ensemble des termes de poids maximum p. L'ensemble des termes de poids p dans $G_{\lambda\mu\nu\ldots}$ sera $a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots \Phi$; mais on doit avoir

$$(1) \qquad G_{\lambda\mu\nu\ldots} - F_{\lambda\mu\nu\ldots} = 0,$$

d'où cette première condition

$$a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots = 1,$$

laquelle exprime que la substitution S_1 laisse F et Φ invariants.

En la supposant remplie, la relation (1) se réduira à

$$\left(D + \frac{D^2}{1.2} + \ldots + \frac{D^k}{1.2\ldots k} + \ldots\right)(\Phi + \Psi) = 0.$$

Les termes de poids maximum $p - 1$ dans le premier membre devant s'annuler séparément, on aura

$$D\Phi = 0.$$

Si cette seconde condition est remplie, on en déduira

$$D^2\Phi = D(o) = o, \qquad D^3\Phi = o, \qquad \ldots.$$

Donc Φ sera une forme invariante et Ψ devra l'être également.

On voit de même que l'ensemble Φ_1 des termes de poids maximum dans Ψ doit être invariant, et ainsi de suite.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Tout polynome F *invariant par la substitution* S *est une somme de formes invariantes* Φ, *homogènes par rapport à chacune des séries de variables* $x, y, z, \ldots$ *et isobares.*

Les degrés $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *de chacune de ces formes* Φ *par rapport aux* x, *aux* y, *aux* z, ... *satisfont à la relation*

$$(2) \qquad a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots = 1,$$

laquelle exprime son invariance par la substitution S_1.

On a, en outre, la condition

$$(3) \qquad D\Phi = o,$$

qui exprime son invariance par la substitution S_2.

Discutons successivement les conditions (2) et (3).

II. Soient

$$\begin{array}{cccc} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & \ldots, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les solutions linéairement indépendantes de l'équation (2) en nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs).

La solution générale en nombres entiers sera

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots, \\ \mu = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots, \\ \nu = \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$m_1, m_2, \ldots$ étant des entiers (positifs, nuls ou négatifs).

Si quelqu'un des entiers m, tel que m_1, est négatif, on mettra son

signe en évidence, et l'on aura ce nouveau système

$$\begin{aligned}\lambda &= -\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots,\\ \mu &= -\mu_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

où m_1 est positif.

On pourra donc supposer qu'aucun des entiers m n'est négatif, à la condition de considérer, après le système (4), ceux qui s'en déduisent par le changement de signe des coefficients de quelques colonnes.

Remarquons d'ailleurs que, Φ étant un polynome entier, on doit rejeter tous les systèmes de valeurs de m_1, m_2, ... qui rendraient négatifs quelqu'un des entiers λ, μ, ν, ...

Pour déterminer les systèmes admissibles, considérons tout d'abord la première équation du système (4)

$$(5) \qquad \lambda = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots,$$

jointe à l'inégalité

$$(6) \qquad \lambda \geqq 0.$$

Si m'_1, m'_2, ...; λ' et m''_1, m''_2, ...; λ'' sont deux solutions de ces relations autres que la solution banale o, o, ...; o qui correspond à $\Phi =$ const., leur addition donnera une nouvelle solution

$$m'_1 + m''_1, \quad m'_2 + m''_2, \quad \ldots; \quad \lambda' + \lambda''.$$

Nous dirons qu'une solution est *primitive* si elle ne peut s'obtenir ainsi par l'addition de deux solutions plus simples.

Ces solutions primitives sont en nombre limité.

En effet, si λ_1, λ_2, ... sont tous positifs, les solutions

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & \ldots; & \lambda_1,\\ 0, & 1, & 0, & \ldots; & \lambda_2,\\ ., & ., & ., & \ldots; & \ldots \end{matrix}$$

seront seules primitives ; car toute solution

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots; \quad \lambda,$$

dans laquelle $m_1 + m_2 + \ldots$ surpasse l'unité (m_1 par exemple n'étant

pas nul) résulte de l'addition des deux solutions

$$\begin{array}{lllll} 1, & 0, & 0, & \ldots; & \lambda_1, \\ m_1-1, & m_2, & m_3, & \ldots; & \lambda-\lambda_1. \end{array}$$

Supposons, au contraire, que quelques-uns des λ soient négatifs; mettant le fait en évidence, nous aurons une égalité de la forme

$$\lambda = \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_{k-1} m_{k-1} - \lambda_k m_k - \lambda_{k+1} m_{k+1} - \ldots.$$

Pour que la solution

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots; \quad \lambda$$

soit primitive, il faudra qu'aucun des entiers m_k, m_{k+1}, ... ne surpasse $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$.

Car si m_k, par exemple, était plus grand que cette somme, l'ensemble des termes négatifs qui entrent dans l'expression de λ serait plus grand en valeur absolue que $\lambda_k(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})$. L'ensemble des termes positifs

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_{k-1} m_{k-1}$$

le serait *a fortiori* puisque λ n'est pas négatif. Donc l'un au moins des entiers m_1, ..., m_{k-1}, par exemple m_1, serait $> \lambda_k$.

Cela posé, la solution donnée résulterait de l'addition des deux suivantes :

$$\begin{array}{llllllll} \lambda_k, & 0, & \ldots, & \lambda_1, & 0, & \ldots; & 0, \\ m_1-\lambda_k, & 0, & \ldots, & m_k-\lambda_1, & 0, & \ldots & \lambda; \end{array}$$

elle ne serait donc pas primitive.

La valeur absolue z de la somme s des termes négatifs, dans l'expression de λ, ne peut donc surpasser la quantité fixe

$$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})(\lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots).$$

Celle des termes positifs sera au moins égale à s; mais chacun des entiers $m_1, \ldots, m_{k-1}$ sera limité. En effet, considérons m_1 par exemple.

Si λ_1 n'est pas nul, m_1 ne pourra surpasser $\frac{s}{\lambda_1} + 1$. Autrement on aurait

$$\lambda \overline{\overline{>}} \lambda_1 m_1 \overline{\overline{>}} s + \lambda_1,$$

et la solution considérée serait la somme des deux suivantes :

$$1,\quad 0,\quad 0,\quad \ldots;\quad \lambda_1,$$
$$m_1-1,\quad m_2,\quad \ldots;\quad \lambda-\lambda_1.$$

Si λ_1 est nul, m_1 ne peut surpasser l'unité; autrement la solution considérée serait la somme des deux suivantes :

$$1,\quad 0,\quad 0,\quad \ldots;\quad 0,$$
$$m_1-1,\quad m_2,\quad \ldots;\quad \lambda$$

Les solutions primitives

$$\begin{array}{llll} m'_1, & m'_2, & \ldots; & \lambda', \\ m''_1, & m''_2, & \ldots; & \lambda'', \\ \ldots, & \ldots, & \ldots; & \ldots \end{array}$$

des relations (5) et (6) étant en nombre limité comme nous venons de l'établir, la solution la plus générale résultant de leur addition sera

$$\begin{aligned} m_1 &= m'_1 t_1 + m''_1 t_2 + \ldots, \\ m_2 &= m'_2 t_1 + m''_2 t_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda &= \lambda' t_1 + \lambda'' t_2 + \ldots, \end{aligned}$$

les t étant des entiers positifs ou nuls.

Substituons ces valeurs de m_1, m_2, ... dans la seconde des relations (4)

$$\mu = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots.$$

Elle prendra la forme

$$(5') \qquad \mu = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots.$$

A cette équation nous devrons joindre l'inégalité

$$(6') \qquad \mu \geqq 0.$$

Nous pouvons raisonner sur ces relations comme nous l'avons fait sur les relations analogues (5) et (6), et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à obtenir les valeurs définitives de λ, μ, ν, ... Elles

seront de la forme

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots, \\ \mu &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots, \\ \nu &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

les β, γ, δ, ... étant des entiers déterminés et les u des entiers arbitraires, les uns et les autres étant positifs ou nuls.

III. Il reste enfin à construire les polynomes F invariants par la substitution S_2. Nous avons vu qu'ils ont pour caractère distinctif de satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$(7) \qquad \mathrm{DF} = 0.$$

Cette équation admet comme solutions particulières les polynomes suivants :

$$(8) \quad \begin{cases} Z_k = z_0^{k-1} z_k - z_0^{k-2} z_{k-1} z_1 + z_0^{k-3} z_{k-2} \dfrac{z_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} z_1 \dfrac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad\qquad (k = 2, \ldots, p); \\ Y_1 = z_0 y_1 - y_0 z_1, \\ Y_k = y_0^{k-1} y_k - y_0^{k-2} y_{k-1} y_1 + y_0^{k-3} y_{k-2} \dfrac{y_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} y_1 \dfrac{y_1^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad\qquad (k = 2, \ldots, n); \\ X_1 = y_0 x_1 - x_0 y_1, \\ X_k = x_0^{k-1} x_k - x_0^{k-2} x_{k-1} x_1 + x_0^{k-3} x_{k-2} \dfrac{x_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} x_1 \dfrac{x_1^{k-1}}{(k-1)!} \\ \qquad\qquad (k = 2, \ldots, m). \end{cases}$$

On a, en effet, par exemple,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}Z_k &= z_{k-1} \frac{\partial Z_k}{\partial z_k} + z_{k-2} \frac{\partial Z_k}{\partial z_{k-1}} + \ldots + z_0 \frac{\partial Z_k}{\partial z_1} \\ &= y_0^{k-1} y_{k-1} - y_0^{k-2} y_{k-2} y_1 + y_0^{k-3} y_{k-3} \frac{y_1^2}{1.2} - \ldots \\ &\qquad + (-y_0^{k-1} y_{k-1} + y_0^{k-2} y_{k-2} y_1 - \ldots) = 0, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{D}Y_1 = y_0 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + z_0 \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} = z_0 y_0 - y_0 z_0 = 0.$$

Tout polynome formé avec ceux-ci et avec les variables x_0, y_0, z_0

sera encore invariant; et si, après substitution des valeurs des X, Y, Z, il contient en facteur commun quelques puissances de x_0, y_0, z_0, on pourra supprimer ce facteur commun; le quotient sera encore invariant.

Réciproquement tout polynome invariant s'obtiendra par ce procédé.

Soit, en effet, F un polynome formé avec les variables x, y, z. Résolvons les équations (8) par rapport à z_2, ..., z_p; y_1, ..., y_n; x_1, ..., x_m. Les valeurs trouvées seront rationnelles et auront pour dénominateur commun le déterminant

$$z_0 z_0^2 \ldots z_0^{p-1} z_0 . y_0 y_0^2 \ldots y_0^{n-1} y_0 . x_0 x_0^2 \ldots x_0^{m-1},$$

de ces équations.

Substituant ces valeurs dans F et chassant les dénominateurs, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$x_0^\alpha y_0^\beta z_0^\gamma \mathrm{F} = \mathrm{P},$$

P étant un polynome en Z_2, ..., Z_p; Y_1, ..., Y_n; X_1, ..., X_m; x_0, y_0, z_0, z_1.

Si l'on veut que F soit invariant, il faut que DP soit nul. Mais les Z, Y, X étant invariants, DP se réduit à $z_0 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1}$. Donc P est indépendant de z_1, ce qui démontre notre proposition.

Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (suite);

PAR MAURICE GEVREY.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS SINGULIÈRES.

Étant donnée l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

nous avons supposé jusqu'ici [1] que, dans la région $\mathcal{R}$ où nous l'envisagions, le coefficient *b gardait un signe constant sans s'annuler* et restait d'ailleurs fini. Étudions maintenant le cas où *b s'annule dans* $\mathcal{R}$ *le long d'une ligne* L, dont nous pourrons préciser plus tard la nature; pour le moment, supposons que L n'admette pas de tangente caractéristique, à moins d'être elle-même caractéristique : nous aurons donc à examiner deux genres d'équations, que nous appelons *équations singulières.*

63. RÉDUCTION A UNE FORME CANONIQUE. — D'après ce que nous venons de dire, il y a deux cas à envisager.

I. L *n'est ni caractéristique ni tangente à une caractéristique.* —

---

(1) *Voir*, pour les Chapitres I, II et III (§ 1 à 62), le *Journal de Mathématiques* de 1913. Le lecteur est prié de se reporter à ce premier Mémoire pour les notations s'il y a lieu et, d'une façon générale, *pour tout ce qui concerne les paragraphes* **1** *à* **62**. Voir dans l'Introduction p. 313 ce qui a rapport aux Chapitres IV et V.

Supposons que L ne soit coupée qu'en un point par les caractéristiques, et soit $x = \varphi(y)$ son équation. Nous prenons le coefficient b sous la forme

$$(1) \qquad b = -[x - \varphi(y)]^p B(x, y),$$

en supposant tout d'abord que p soit *un nombre entier positif*. La fonction B garde, dans la région $\mathcal{R}$ envisagée, un signe constant, qu'on peut toujours choisir positif. En prenant une nouvelle variable x', au lieu de x, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + a\frac{\partial x'}{\partial x} - (x - \varphi)^p B \frac{\partial x'}{\partial y}\right]\frac{\partial z}{\partial x'} - (x - \varphi)^p B \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0.$$

Déterminons la fonction x' de x et de y par la condition

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 = \frac{[x - \varphi(y)]^p B(x, y)}{x'^p},$$

et, pour cela, posons

$$\frac{2\,|x'|^{\frac{p+2}{2}}}{p+2} = \left|\int_{\varphi(y)}^{x} |x - \varphi|^{\frac{p}{2}}\sqrt{B}\,dx\right| = |x - \varphi|^{\frac{p+2}{2}}\int_0^1 t^{\frac{p}{2}}\sqrt{B[\varphi + t(x - \varphi), y]}\,dt.$$

Désignant par $\mathfrak{B}$ l'intégrale de cette formule, il nous suffira donc de prendre

$$x' = \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{2}{p+2}}[x - \varphi(y)]\,[\mathfrak{B}(x, y)]^{\frac{2}{p+2}},$$

et l'équation (E) deviendra

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - x'^p\frac{\partial z}{\partial y} + a'\frac{\partial z}{\partial x'} + c'z + f = 0.$$

L'hypothèse de p *entier*, que nous avons faite, n'est *nullement essentielle*. Si, d'une manière générale, nous avions écrit b sous la forme

$$b = \pm|x - \varphi(y)|^\alpha B(x, y) \qquad (\alpha \text{ positif quelconque}),$$

le signe $\pm$ signifiant que b peut ou non changer de signe quand on traverse la ligne L (mais garde un signe constant d'un même côté),

nous aurions trouvé

$$x' = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} [x - \varphi(y)] [\psi(x, y)]^{\frac{2}{\alpha+2}}.$$

Nous obtenons, en définitive, x' en fonction de x d'une manière *univoque*. La transformation fait correspondre à L une portion de Oy, et elle est même *biunivoque* pour les points situés suffisamment près de L de part et d'autre. La fonction $\varphi(y)$ est supposée dérivable.

En supprimant les accents, nous avons donc réduit l'équation à la forme

$$(\overline{\mathcal{E}}) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0,$$

ou

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \pm |x|^\alpha \frac{\partial z}{\partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0.$$

Dans tout ce qui concerne ce genre d'équations singulières, nous les envisagerons sous la forme $(\overline{\mathcal{E}})$. Tout ce que nous dirons du cas *où p est pair* s'appliquera *sans modification*, sauf mention expresse, au cas où, dans l'équation (1′), on prend le signe + *de chaque côté de* Oy; et tout ce que nous dirons du cas *où p est impair* s'appliquera au cas où, dans l'équation (1′), on prend le signe + *à droite* de Oy et le signe − *à gauche* [1].

II. L *est caractéristique*. — Dans ce cas, nous supposons que le coefficient b a la forme (avec $\varepsilon = \pm 1$)

$$b = \varepsilon y^p B(x, y) \qquad \text{ou} \qquad b = \pm |y|^\alpha B(x, y),$$

et un changement de variable analogue à celui du paragraphe **17** nous conduit à la forme

$$(\overline{\mathcal{E}}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

---

(1) Quand p est pair, le changement de variable que nous avons utilisé au paragraphe **17** ne peut servir ici, car il n'est pas biunivoque, et il introduit un pôle dans les coefficients.

ou à une forme analogue, dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ serait $\pm |y|^\alpha$, avec la même remarque que plus haut ([1]).

Il résulte de là que *les deux types les plus simples*, rentrant dans les formes $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$, sont

$$(\bar{e}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad (\bar{e}') \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$(\bar{e}_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y), \qquad (\bar{e}'_1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y).$$

I. — Cas où la ligne singulière n'est pas caractéristique.

Nous commençons donc par l'étude de l'équation $(\bar{e})$.

64. Solution fondamentale. — Si nous posons $s = x^q$, avec $q = p + 2$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{1}{s}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{q^2 s}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (q = p + 2),$$

équation d'un type étudié par M. Kepinsky (*Math. Annalen*, t. LXI), qui a envisagé

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{m+1}{s}\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{n}{s}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

La solution fondamentale de l'équation (2) est

$$(3) \qquad \frac{s^{m+1}}{(y-\eta)^{m+1}} e^{-n\frac{s+\sigma}{y-\eta}} \zeta^{-m} G_m(\zeta) \qquad \left(\zeta = 2in\frac{\sqrt{s\sigma}}{y-\eta}\right),$$

G_m étant l'intégrale générale de l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 G}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dG}{d\zeta} + \left(1 - \frac{m^2}{\zeta^2}\right)G = 0,$$

c'est-à-dire $G_m = AJ_m + BJ_{-m}$, la lettre J désignant la fonction de Bessel classique, en supposant $m \neq 0$.

([1]) La notation ε n'a pas ici le même sens que la notation $\pm$, car nous supposons que ε ne change pas quand on traverse Ox (*voir* § 69).

La fonction (3) est solution de (2) en s, y et de l'adjointe en σ, η: en revenant aux variables primitives, on aurait une solution de $(\overline{e})$, mais il faudrait diviser par ξ^{p+1} pour avoir une solution de l'adjointe.

Ayant ainsi prévu la forme de la solution, nous opérons synthétiquement en posant

$$U(\xi,\eta;x,y) = \frac{x\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} I(\theta) \qquad \left[\theta = \frac{(x\xi)^q}{q^4(y-\eta)^2}\right],$$

et, portant dans $(\overline{e})$, nous trouvons alors que I vérifie l'équation

$$I\frac{d^2 I}{d\theta^2} + \left(1+\frac{1}{q}\right)\frac{dI}{d\theta} - I = 0.$$

C'est une équation qui dérive de l'équation de Bessel, et dont la solution est de la forme $AI_{\frac{1}{q}}(\theta) + B\theta^{-\frac{1}{q}}I_{-\frac{1}{q}}(\theta)$, A et B étant des constantes et $I_m(\theta)$ désignant la fonction

$$I_m(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} = \frac{J_m(2i\sqrt{\theta})}{(i\sqrt{\theta})^m}.$$

Nous obtenons donc en définitive comme *solution fondamentale, valable dans tout le plan*,

$$U(\xi,\eta;x,y) = e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}}\left[A\frac{x\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} I_{\frac{1}{q}}(\theta) + B\frac{q^{\frac{4}{q}}}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} I_{-\frac{1}{q}}(\theta)\right].$$

Appelons U_1 et U_2 les deux fonctions ainsi introduites, de sorte que $U = AU_1 + BU_2$: U est solution de la proposée et de l'adjointe : soit en x, y, de

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p\frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

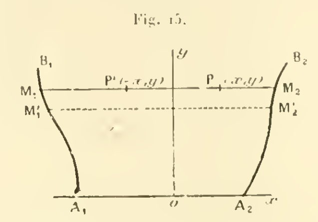
en ξ, η, de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi^p\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Nous allons avoir à distinguer deux cas, suivant la parité de p. Supposons tout d'abord que *p soit pair*.

65. Formule fondamentale. — Le coefficient de $\frac{\partial z}{\partial y}$ n'étant jamais positif, le contour portant les données a la même disposition que les contours (C), envisagés dans l'étude de l'équation $\delta z = 0$ (premier Mémoire, p. 307 et § 1). Si ce contour est tout entier d'un même côté de Oy, on est ramené évidemment aux problèmes résolus au

Fig. 15.



Chapitre II. Mais en utilisant la solution fondamentale U, le résultat auquel nous parviendrons sera *indépendant de la situation* de (C).

En opérant comme il a été dit au paragraphe 1, nous trouvons (*fig.* 15) par la formule de Riemann (ou de Green)

$$\int_{M'_1}^{M'_2} \xi^p \, U z \, d\xi = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2} \xi^p \, U z(\xi, \eta) \, d\xi + \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) d\eta.$$

Pour évaluer la limite du premier membre quand la caractéristique $M'_1 M'_2$, d'ordonnée $y - \varepsilon$, tend vers $M_1 M_2$, c'est-à-dire quand ε tend vers zéro, nous utiliserons la *valeur asymptotique* de $I_m(\theta)$, qui est

$$I_m(\theta) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{\theta}}}{\theta^{\frac{2m+1}{4}}} \qquad (\theta > 0).$$

Si nous posons $q = 2r$, donc $m = \frac{1}{q} = \frac{1}{2r}$, nous avons sur $M'_1 M'_2$

$$\theta = \left[\frac{(x\xi)^r}{4 r^2 \varepsilon} \right]^2, \qquad I_{\frac{1}{2r}}(\theta) \sim \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi}} \left| \frac{\varepsilon^{\frac{1}{r}}}{x\xi} \right|^{\frac{r+1}{2}} e^{\frac{|x\xi|^r}{2r^2\varepsilon}}.$$

D'où la valeur asymptotique du premier terme U_1 de la solution fon-

damentale

$$U_1 \sim \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \frac{1}{|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}} e^{-\frac{|x|^r - |\xi|^r}{4r^2\varepsilon}}.$$

Si nous supposons P entre M_1 et M_2, tous les éléments de l'intégrale envisagée tendent vers zéro, sauf au voisinage des points $P(x, y)$ et $P'(-x, y)$, du moins si ce dernier point est entre M_1 et M_2. Suivant un raisonnement classique, que nous ne reproduirons pas, la partie de l'intégrale $\int_{M'_1}^{M'_2}$ qui contient U_1 aura donc pour limite, en ce qui concerne le point P (en supposant $x > 0$),

$$A \frac{(2r)^{1+\frac{1}{r}}}{2\sqrt{\pi}} z(x, y) \lim_{\varepsilon=0} \int_{x-h}^{x+h} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}} e^{-\frac{x^r - \xi^r}{4r^2\varepsilon}} \xi^{2(r-1)}\, d\xi.$$

Si nous posons $\xi^r = x^r + 2r\sqrt{\varepsilon}\, t$, l'intégrale précédente devient

$$2\int \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{r-1}{2}} e^{-t^2}\, dt.$$

h étant choisi de telle sorte que $\frac{\xi}{x}$ soit aussi voisin de *un* qu'on le veut. Quand ε tend vers zéro, les limites d'intégration deviennent $-\infty$ et $+\infty$, et nous obtenons, au total,

$$\text{en P} \quad A(2r)^{1+\frac{1}{r}} z(x, y), \qquad \text{en P}' \quad -A(2r)^{1+\frac{1}{r}} z(-x, y).$$

Un calcul tout à fait analogue nous donnerait, pour la partie contenant U_2, une limite égale à $B(2r)^{1+\frac{1}{r}}[z(x, y) + z(-x, y)]$.

Si donc nous prenons

$$(4) \qquad A = B = \frac{1}{2}(2r)^{-1-\frac{1}{r}} = \frac{1}{2} q^{-1-\frac{2}{r}},$$

nous obtenons en définitive *la formule fondamentale*

$$(5) \qquad z(x, y) = \int_{(C_y)} \xi^p U(\xi, \eta; x, y)\, z(\xi, \eta)\, d\xi + \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) d\eta.$$

valable quand P est entre M_1 et M_2, c'est-à-dire à l'intérieur de S [1], (C_y) désignant la partie de (C) située au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y. Si le contour était situé d'un même côté de Oy, il *suffirait* de prendre un seul des termes de la solution fondamentale, en ayant soin de doubler son coefficient; dans ce cas, comme dans le précédent, il peut se faire qu'une partie de (C) soit formée par un segment de Oy. Mais, en définitive, la formule est valable quel que soit (C), satisfaisant aux mêmes conditions que dans le paragraphe **1**.

Si nous avions supposé P sur le contour même, nous aurions trouvé la même formule, au facteur $\frac{1}{2}$ près dans le premier membre, à la condition toutefois de faire sur l'arc contenant P l'hypothèse (3) (§ **1**).

D'ailleurs, si nous faisons sur la fonction $X(y)$ les mêmes hypothèses que dans le paragraphe **2** et si, en posant $V(\xi, \eta; x, y) = \frac{\partial U}{\partial \xi}$, nous envisageons les intégrales

$$\mathfrak{I}_0 = \int_0^y U[X(\eta), \eta; x, y]\,\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \mathfrak{I} = \int_0^y V[X(\eta), \eta; x, y]\,\varphi(\eta)\,d\eta,$$

nous pouvons établir pour $\mathfrak{I}$ une limitation analogue à la formule (6) (§ **2**) et ainsi obtenir, par la même voie que dans ce paragraphe, P_0 étant un point de l'arc $x = X(y)$, la *formule de discontinuité* [2]

$$\lim_{P \to P_0} (\mathfrak{I}_P - \mathfrak{I}_{P_0}) = \pm \frac{A + B}{2} q^{1+\frac{2}{q}} \varphi(P_0).$$

---

(1) Il est manifeste, en effet, que l'hypothèse $x > 0$ faite plus haut n'a servi qu'à simplifier les notations. Mais nous avons supposé P' dans S : s'il est à l'extérieur, il n'y a pas dans le calcul de terme $z(-x, y)$, et le résultat est le même. Si P' est sur (C), les termes relatifs à P' n'ont pas les valeurs indiquées, mais *ils se détruisent* à cause de $A = B$. Si P est sur Oy, $U_1 = 0$, et la deuxième intégrale seule intervient; mais comme, sur Oy, $z(-x, y) = z(x, y)$, le résultat final est toujours le même. Donc, la formule est valable *quel que soit* P *dans* S. La méthode employée est d'ailleurs applicable à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - |x|^\alpha \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, non seulement, d'après ce que nous avons déjà dit (§ 63), pour $\alpha > 0$, mais encore pour $-1 < \alpha < 0$, c'est-à-dire $1 < q < 2$ (avec discontinuité de la dérivée seconde sur Oy). Pour $-2 < \alpha \leq -1$, un examen spécial serait nécessaire.

(2) Si P_0 est sur Oy, il faut supposer $A = B$ dans la formule; celle-ci convient donc à tous les cas si A et B ont les valeurs (4).

66. Problèmes aux limites. — La formule de discontinuité nous permet d'obtenir la solution prenant des valeurs données sur un contour (C) coupant ou non Oy. Nous ne voulons pas reproduire à ce sujet des détails de calculs analogues à ceux qu'on rencontre dans l'étude de l'équation de la chaleur. Indiquons simplement la marche, qui est d'ailleurs tout à fait semblable à celle dont nous avons parlé dans le premier Chapitre. Désignant toujours par Φ_1, Φ_2, Φ les données sur A_1B_1, A_2B_2, A_1A_2, et supposant A_1A_2 sur Ox, nous formerons tout d'abord la fonction

$$\bar{z}(x, y) = \int_{a_1}^{a_2} U(\xi, o; x, y)\Phi_0(\xi)\,d\xi,$$

les notations ayant la même signification qu'au paragraphe 5 et les constantes de U ayant les valeurs (4). Puis, nous poserons

$$z - \bar{z} = \int_0^y V[X_1(\eta), \eta; x, y]\varphi_1(\eta)\,d\eta + \int_0^y V[X_2(\eta), \eta; x, y]\varphi_2(\eta)\,d\eta;$$

$\bar{z}$ prend les valeurs données sur A_1A_2 : nous avons donc à écrire que z se réduit à $\Phi_i(y)$ sur A_iB_i, ce qui nous donnera un système d'équations intégrales de deuxième espèce ([1]). Les autres problèmes aux limites se traitent comme nous avons dit au paragraphe 5 : d'une manière générale, on exprime z par une somme d'intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ ([2]).

Unicité. — Si nous posons $z = u(l^2 - x^2)$, l'équation $(\bar{e})$ devient

$$(l^2 - x^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^p\frac{\partial u}{\partial y}\right) - 4x\frac{\partial u}{\partial x} - 2u = 0.$$

Si l est suffisamment grand, nous sommes donc dans les conditions

---

([1]) *Du type de* Volterra [Le contour satisfaisant à la condition (Γ), § 3].

([2]) Si l'arc A_1B_1, par exemple, est constitué entièrement par une portion de Oy, on utilisera des intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}}e^{-\frac{x^q}{q^2(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta, \qquad \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}e^{-\frac{x^q}{q^2(y-\eta)}}\varphi(\eta)\,d\eta,$$

tout à fait analogues aux intégrales $\mathfrak{I}_0$ et $\mathfrak{I}$ du paragraphe 2, pour lesquelles $q = 2$ (en supposant AM sur Oy).

envisagées au paragraphe **18** ($c < 0$) et par suite u ne peut admettre ni maximum positif, ni minimum négatif, propre ou impropre, relativement aux valeurs prises en tout point d'ordonnée inférieure ou égale. De là résulte, par le raisonnement habituel, *l'unicité d'une solution de l'équation* ($\overline{e}$), ou même ($\overline{e}_1$), prenant des valeurs données sur un contour $\mathfrak{C}$ continu simple, formant avec toute caractéristique qui le coupe un ou plusieurs contours fermés ; la solution est supposée régulière à l'intérieur du contour ainsi formé et continue sur $\mathfrak{C}$. D'ailleurs, ce que nous venons de dire est vrai pour toute équation (E) (p. 105) si $b \geqq 0$ et $c \leqq 0$ (*cf.* Picard, *Analyse*, t. II, p. 35, 2e éd.).

Dès lors, P étant un point intérieur au contour $\mathfrak{C}$, si M est le maximum d'une solution z de ($\overline{e}$) sur la partie de $\mathfrak{C}$ située au-dessous de la caractéristique passant par P, on a sûrement $z_P \leqq M$. Si, en effet, dans l'hypothèse contraire, on avait $z_P = M_1 > M$, sur tout rayon vecteur issu de P il existerait au moins un point où $z = N$, avec $M < N < M_1$; et le lieu de ce point serait un contour $\mathfrak{C}'$, sur lequel z serait constant, ce qui est impossible, puisque la seule solution de ($\overline{e}$) réalisant ce fait est la constante N. Ceci montre l'impossibilité d'un *maximum propre* relativement aux points d'ordonnée inférieure ou égale.

Le théorème du paragraphe **25** sur les séries des solutions est donc vrai pour l'équation ($\overline{e}$), d'après les considérations précédentes.

67. La fonction Z, solution de l'équation ($\overline{e}_1$). — La formule fondamentale relative à l'équation

$$(\overline{e}_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

ne diffère de la formule (5) que par la présence, dans le second membre, de l'intégrale double (S_y désignant le domaine $M_1 A_1 A_2 M_2$)

$$Z(x, y) = -\int\int_{S_y} U(\xi, \eta ; x, y) f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

Ceci nous conduit à supposer que cette intégrale, où les constantes A et B de U ont toujours les valeurs (4), est solution de l'équation ($\overline{e}_1$). La méthode à suivre pour le démontrer serait analogue à celle

qui a été utilisée pour l'équation de la chaleur. Nous allons tout d'abord montrer l'existence de l'intégrale Z et de l'intégrale

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -\int\int_{S_y} \frac{\partial U}{\partial x} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Supposons, pour fixer les idées, $x > 0$ et envisageons l'intégrale (en supprimant l'indice S_y) $\int\int |U_1|\, d\xi\, d\eta$. Or, on peut écrire [1]

$$|I_m(\theta)| < (K) \frac{e^{2\sqrt{|\theta|}}}{|\theta|^{\frac{2m+1}{4}}}.$$

Donc (en posant toujours $q = 2r$),

$$\int\int |U_1|\, d\xi\, d\eta < (K) \int\int \frac{e^{-\frac{(x^r - |\xi|^r)^2}{4r^2(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \frac{d\xi\, d\eta}{|x\xi|^{\frac{r-1}{2}}},$$

intégrale qui a parfaitement un sens, si ξ ne peut s'annuler, c'est-à-dire si l'aire envisagée n'est pas traversée par Oy. Dans le cas où ξ peut s'annuler, remarquons que nous pouvons écrire

$$(5') \qquad \left| I_{\frac{1}{q}}(\theta) \right| < (K) \frac{e^{2\sqrt{|\theta|}}}{|\theta|^{\alpha}},$$

pourvu que [2] $\alpha \leqq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2q}$. D'où

$$\int\int |U_1|\, d\xi\, d\eta < (K) \int\int \frac{e^{-\frac{(x^r - |\xi|^r)^2}{4r^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{2r}-2\alpha}} |x\xi|^{1-2\alpha r}\, d\xi\, d\eta.$$

Nous pouvons prendre (puisque $q \geqq 2$)

$$\frac{1}{2r} < 2\alpha \leqq \frac{1}{r}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{q} < 2\alpha \leqq \frac{2}{q},$$

---

(1) Ceci résulte de la valeur asymptotique de I_m. La notation (K) désigne *tout coefficient numérique fini* : voir § 2, note (4).

(2) Car α sera alors inférieur à l'exposant de θ dans le dénominateur de la valeur asymptotique de $I_{\frac{1}{q}} = I_{\frac{1}{2r}}$.

et alors l'exposant de $(y-\eta)$ sera inférieur à *un* et l'exposant de $|x\xi|$ sera positif ou nul.

Donc, l'intégrale *a un sens* et, quand x tend vers zéro, elle tend vers zéro. Si nous prenons $\alpha = \frac{1}{2r} - \frac{1}{q}$, le changement de variable $x^r - |\xi|^r = 2rt\sqrt{y-\eta}$ montre aisément que l'intégrale est $< (\mathrm{K})y^{\frac{2}{q}}$ quel que soit x.

Quant à $\int\int |\mathrm{U}_2|\, d\xi\, d\eta$, un raisonnement tout à fait analogue nous donne les mêmes conclusions.

Étudions maintenant l'intégrale $\int\int \left|\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$. Remarquant que $\frac{d\mathrm{I}_m(\theta)}{d\theta} = \mathrm{I}_{m+1}(\theta)$, nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x} = \frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} \left[\xi \mathrm{I}_{\frac{1}{q}} - \frac{x^{q}\xi}{q(y-\eta)} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}} + \frac{(x\xi)^q \xi}{q^3(y-\eta)^2} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}+1}\right].$$

$\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}$ se décompose donc en *trois* termes : voyons le premier. On se rend compte aisément que l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int\int \frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{x^q+\xi^q}{q^2(y-\eta)}} \xi\, \mathrm{I}_{\frac{1}{q}}\, d\xi\, d\eta$$

a un sens si x et ξ ne s'annulent pas. Pour élucider le cas où ils peuvent s'annuler, envisageons tout d'abord la partie de l'aire située *à droite* de Oy (en supposant $x > 0$) et partageons-la en deux régions 1 et 2 par la verticale d'abscisse $2x$. Dans la bande 1 qui contient P(x, y), nous avons $0 \leq \frac{\xi}{x} \leq 2$, et la formule $(5')$, avec $\alpha = \frac{1}{2q}$, nous permet d'écrire notre intégrale

$$\mathrm{J}_1 = \int\int_1 \left(\frac{\xi}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x\xi}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}} \mathrm{I}_{\frac{1}{q}}\, d\xi\, d\eta < (\mathrm{K}) \int\int_1 \frac{e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}}}{y-\eta}\, d\xi\, d\eta.$$

En posant $\xi^r = x^r + tq\sqrt{y-\eta}$ pour $x \leq \xi \leq 2x$, nous obtenons une intégrale comparable à $\int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}dt}{(x^r+tq\sqrt{y-\eta})^{1-\frac{1}{r}}}$, qui a

un sens, même si x tend vers zéro. D'autre part, dans la partie de la région 1 où l'on a $0 \leq \xi \leq x$, l'inégalité facile à vérifier $(2x-\xi)^r - x^r \leq (2^r-1)(x^r-\xi^r)$ nous permet d'obtenir une intégrale de comparaison analogue à la précédente.

Pour la région 2 restante, dans laquelle $\xi \geq 2x$, nous avons, en prenant $\alpha = 0$, une intégrale dont le module est plus petit que

$$(K)\int\int_2 \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{(x^r-\xi^r)^2}{q^2(y-\eta)}} d\xi\, d\eta < (K)\int\int_2 \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\lambda^2 \xi^q}{q^2(y-\eta)}}$$

avec $\lambda = 1 - 2^{-r}$, puisque $\xi \geq 2x$. Or, cette intégrale a un sens.

On opérerait de même pour la région située *à gauche* de Oy.

Donc, l'intégrale J a un sens, même quand x tend vers zéro; quand y tend vers zéro, on établit sans peine qu'elle est infiniment petite d'ordre $\frac{1}{q}$. Il est facile également de voir que cette intégrale est continue pour $x = 0$: il suffit, pour s'en convaincre, de partager l'aire en deux parties par une caractéristique voisine de $M_1 M_2$; l'intégrale relative à la partie inférieure est évidemment continue pour $x = 0$ et l'autre, d'après ce que nous venons de voir, peut être rendue aussi petite qu'on le veut, ce qui suffit à établir la continuité.

Les mêmes conclusions s'appliquent aux deux autres termes de la dérivée $\frac{\partial U_1}{\partial x}$; il est inutile de reproduire ici des calculs analogues aux précédents.

Quant à l'intégrale $\int\int \left|\frac{\partial U_2}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$, son étude ne présente aucune difficulté. Nous obtenons en définitive des intégrales qui sont *des fonctions continues de x, y* : leurs valeurs pour $x = 0$ sont

$$Z(0, y) = B\,\frac{q^{\frac{1}{q}}}{\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)}\int\int_{S_y} \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(0, y) = \frac{A}{\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right)}\int\int_{S_y} \frac{\xi e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Les dérivées $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ ne peuvent se calculer par la règle de Leibniz :

les mêmes raisonnements que dans le cas de l'équation de la chaleur s'appliquent ici, avec cette différence cependant que les points $P(x, y)$ et $P'(-x, y)$ *jouent le même rôle*. Dans les conditions d'existence de ces dérivées, relatives à $f(x, y)$, s'introduiront les courbes c ayant pour équation : $(|\xi|^r - |x|^r)^2 = \lambda(y - \eta)$ ou, ce qui revient au même, les paraboles envisagées aux paragraphes **8** et **9**, car si les conditions (A) sont supposées réalisées pour les paraboles, elles le sont pour les courbes c, et réciproquement. Nous obtiendrons donc les mêmes conditions d'existence, mais relatives *à la fois* aux points P et P'.

En décomposant l'intégrale Z en deux autres Z_1 et Z_2, correspondant à U_1 et U_2 ($Z = Z_1 + Z_2$), nous trouverons alors

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_1}{\partial y} = A q^{1+\frac{2}{q}} [f(x, y) - f(-x, y)],$$
$$\frac{\partial^2 Z_2}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_2}{\partial y} = B q^{1+\frac{2}{q}} [f(x, y) + f(-x, y)];$$

d'où, en prenant pour A et B les valeurs (4) et additionnant,

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z}{\partial y} = f(x, y).$$

Nous avons vu plus haut que les limitations de Z et $\frac{\partial Z}{\partial x}$ étaient respectivement de l'ordre de $y^{\frac{2}{q}}$ et $y^{\frac{1}{q}}$. Nous possédons par suite tous les éléments pour former une *fonction de Green* et appliquer aux équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} - a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

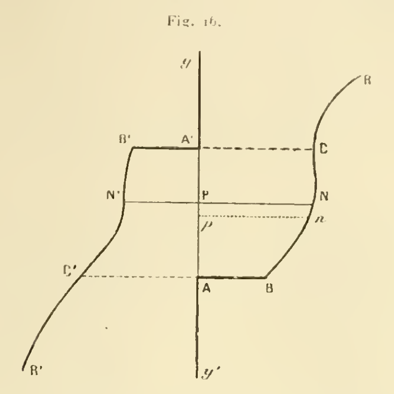
la méthode des approximations successives. Les théorèmes relatifs aux *séries de solutions* et ses applications aux *contours présentant des singularités* (§ **25** et **26**) subsistent ici sans modifications.

68. Étude du cas où p est impair : problème du raccordement. — Les formules obtenues jusqu'ici en supposant *p pair* sont vraies également, *quand p est impair*, pour un contour (C) situé d'*un même côté de* Oy et pouvant même comprendre une portion de cette droite :

si (C) est *à droite* de Oy, il devra être ouvert *vers le haut*, et *vers le bas* au contraire s'il est *à gauche*. Pour un contour coupant Oy, il se pose un problème d'un genre tout à fait spécial, et que nous appelons le *problème du raccordement*.

Envisageons le contour de la figure 16 : nous pouvons le considérer

Fig. 16.



comme résultant de la juxtaposition des contours $yABR$ et $y'A'B'R'$, à l'intérieur desquels une solution de l'équation $(\bar{e})$ est déterminée par les valeurs qu'elle prend au bord. Pour que deux solutions z et z' relatives à ces deux contours constituent *une seule et même solution régulière*, il faudra que les valeurs de z, z' et de leurs dérivées premières *se raccordent* sur la portion AA' de l'axe des y, commune aux deux contours.

Le problème consiste donc à déterminer *les valeurs que doit prendre z sur* AA' pour qu'il en soit ainsi, et cela en fonction des valeurs données sur ABC, $A'B'C'$. Si nous connaissons, de plus, les valeurs de z et z' sur CR et $A'y$, $C'R'$ et Ay' — ces valeurs formant un prolongement *continu* des précédentes à partir des points C et A', C' et A —, nous pourrons ainsi construire une solution régulière *à l'intérieur d'une bande ouverte dans les deux sens*.

Une première méthode pour arriver à ce résultat consisterait à opérer de la façon suivante : a et a' étant les ordonnées de A et A', la

formule fondamentale appliquée au contour PABN et au point P nous donne (en posant toujours $q = p+2$)

$$(6)\qquad q^{1-\frac{2}{q}}\,\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right) z(0,y)$$
$$= -\int_a^y \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}(0,\eta)}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}}\,d\eta + \int_{\text{ABN}} \xi^{q-2} u_2 z\,d\xi + \left(u_2 \frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\right) d\eta,$$

u_2 désignant la fonction

$$(6')\qquad u_2(\xi, \eta; y) = \frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}}\, e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

Si l'on peut éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur BC, on formera une relation entre $z(0,y)$ et $\frac{\partial z}{\partial x}(0,y)$. Opérant de même pour le contour PA'B'N', on trouvera une deuxième relation entre $z'(0,y)$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}(0,y)$. Identifiant les valeurs de $z(0,y)$ et $z'(0,y)$, on aura une relation vérifiée par la valeur commune de $\frac{\partial z}{\partial x}(0,y)$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}(0,y)$. Mais, comme il faudrait ensuite s'assurer du raccordement de $\frac{\partial z}{\partial y}$ et $\frac{\partial z'}{\partial y}$, nous allons opérer un peu différemment en réalisant tout d'abord le *raccordement des deux dérivées* de z et z'. Envisageons la fonction

$$(7)\qquad u_1(\xi, \eta; y) = \frac{\xi}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}\, e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}}.$$

formée en dérivant U_1 par rapport à x et faisant $x = 0$. C'est une solution de l'équation adjointe et nous pouvons appliquer la formule de Riemann au domaine pABn : il vient

$$(8)\qquad \int_p^n \xi^{q-2} u_1 z\,d\xi = \int_A^B \xi^{q-2} u_1 z\,d\xi + \int_a^{y-\varepsilon} \frac{z(0,\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}$$
$$+ \int_B^n \xi^{q-2} u_1 z\,d\xi + \left(u_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) d\eta,$$

y étant l'ordonnée de PN, $y-\varepsilon$ celle de pn. Une intégration par

parties nous donne

$$(8') \qquad \int_p^n \xi^{q-2} u_1 z\, d\xi = \frac{-q}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}}[z]_p^n + \int_p^n \frac{q}{\varepsilon^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2 \xi}} \frac{\partial z}{\partial \xi}\, d\xi,$$

$$\int_a^{y-\varepsilon} \frac{z(o,\eta)\, d\eta}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}} = q\left[\frac{z(o,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\right]_a^{y-\varepsilon} - q\int_a^{y-\varepsilon} \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta.$$

Remarquons que nous pouvons toujours supposer les valeurs $z(o, a)$ et $z(o, a')$, c'est-à-dire z_A et $z_{A'}$, nulles : il suffit pour cela de prendre comme fonction inconnue, au lieu de z elle-même, la fonction $z - \zeta$, ζ étant la fonction linéaire en y, solution de $(\bar{e})$,

$$\zeta = z_A + \frac{z_{A'} - z_A}{a' - a}\left[y - a + \frac{x^q}{q(q-1)}\right].$$

Si, maintenant, nous faisons tendre ε vers zéro, il n'y a aucune difficulté à calculer la limite de la dernière intégrale de la formule (8′); d'autre part, les parties infinies se détruisent et il vient

$$(9) \qquad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z}{\partial x}(o,y)$$
$$= -q\int_a^{y} \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta + \int_{ABN} \xi^{q-2} u_1 z\, d\xi + \left(u_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} - z\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right) d\eta.$$

Il est facile d'obtenir une formule ne contenant pas les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur BN. En effet, on peut déterminer $\varphi(s, y)$ telle que la fonction

$$w(\xi, \eta; y) = \int_\eta^y \frac{\partial U_1}{\partial x}[\xi, \eta; X(s), s]\, \varphi(s, y)\, ds,$$

solution de l'équation adjointe nulle sur PN et sur AP, prenne sur BN la même valeur que u_1 : il suffit de résoudre une équation intégrale (*voir* § 66). Par suite, en utilisant dans les calculs précédents la fonction $u_1 - w$ au lieu de u_1, on trouve une relation de la forme

$$(10) \qquad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z}{\partial x}(o,y)$$
$$= -q\int_a^{y} \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}(o,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\, d\eta - \int_a^{y} \frac{\partial w}{\partial \xi}(o,\eta; y)\, z(o,\eta)\, d\eta + F(y),$$

$F(y)$ étant une fonction connue, renfermant les données sur ABC.

Une méthode toute semblable appliquée au contour AA'B'C' nous donne une relation analogue :

$$(10') \quad q^{\frac{2}{q}}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\frac{\partial z'}{\partial x}(0,y)$$
$$= q\int_{y}^{a'}\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\frac{\partial z}{\partial \eta}(0,\eta)\,d\eta - \int_{y}^{a'}\frac{\partial w'}{\partial \xi}(0,\eta;y)\,z(0,\eta)\,d\eta + F_1(y).$$

Les valeurs des deux dérivées premières de z et z' devant *coïncider sur* Oy, les premiers membres des formules (10) et (10') sont *identiques* et, en égalant les seconds membres et posant

$$q\,\mathfrak{F}(y,\eta) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\eta}^{y}\frac{\partial w}{\partial \xi}(0,s;y)\,ds & \text{pour} \quad \eta < y \\ \displaystyle\int_{y}^{\eta}\frac{\partial w'}{\partial \xi}(0,s;y)\,ds & \text{pour} \quad \eta > y \end{cases} \qquad [\mathfrak{F}(y,y)=0],$$

il vient facilement, après une intégration par parties,

$$(11) \quad \int_{a}^{a'}\left[\mathfrak{F}(y,\eta)+\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\right]\varphi(\eta)\,d\eta = \Phi(y) \qquad \left[\varphi(\eta)=\frac{\partial z}{\partial \eta}(0,\eta)\right],$$

Φ étant une fonction connue ($q\Phi = F - F_1$). Cette équation est une *équation de Fredholm de première espèce :* la partie $\mathfrak{F}$ du noyau est continue quand y et η appartiennent à l'intervalle (a, a') et la partie infinie change de signe quand η traverse la valeur y. Quant à Φ, si nous voulons que cette fonction soit continue aux bornes, il faudra supposer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}$ *existent en* A *et* A', afin qu'une intégration par parties permette de faire disparaître le pôle qui s'introduit pour $y = a$ et $y = a'$ dans les intégrales $\int_{A}^{B}$ [formule (8)] et $\int_{A'}^{B'}$.

Si l'équation (11) admet une solution, nous en déduirons aisément la valeur commune de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z'}{\partial x}$ sur Oy par l'une ou l'autre des équations (10) et (10'); quant à z, on l'obtiendra par une intégration en écrivant que cette fonction s'annule en A, et elle s'annulera alors certainement en A' : ceci résultera de la comparaison des équations utilisées.

Mais il nous faut montrer que *le noyau de l'équation* (11) *est fermé.* Si, en effet, il n'en était pas ainsi, l'équation intégrale sans second membre admettrait une solution continue non nulle; il existerait donc une solution z_0, *régulière* à l'intérieur du contour fermé ABCA'B'C'A, *nulle* sur ABC et A'B'C'. Si l'on suppose BC et B'C' tels que $\frac{\partial z_0}{\partial x}$ existe sur ces arcs [ce qui aura lieu s'ils satisfont à la condition (Γ) § 5, z_0 s'annulant sur eux], on peut écrire, pour le domaine envisagé,

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z_0}{\partial y}\right) z_0\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{C'}^{A} x^p z_0^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{A'}^{C} x^p z_0^2\, dx - \int\int\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 dx\, dy. \end{aligned}$$

Les trois termes que nous venons d'écrire, étant négatifs ou nuls, doivent par conséquent s'évanouir. Donc $\frac{\partial z_0}{\partial x} \equiv 0$ dans le domaine, $z_0 = 0$ sur le bord, et par suite $z_0 \equiv 0$. *Le noyau est donc bien fermé.*

En appliquant le raisonnement au cas où les courbes BC, B'C' s'éloignent à l'infini, on verrait également que *le noyau simple* $\frac{1}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}$ *est fermé*. D'ailleurs, pour démontrer ce point, il suffirait d'utiliser la formule (9) et la formule analogue pour AA'B'C', sans calculer la fonction w. De même la formule (6) montrerait que le noyau $\frac{1}{|y-\eta|^{1-\frac{1}{q}}}$ est aussi fermé. D'après ce que nous avons dit plus haut [§ 65, équation (1') et p. 112 en note], nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *les noyaux de la forme* $\frac{\varepsilon}{|y-\eta|^{\lambda}}$ $(0 < \lambda < 1,\ \varepsilon = \pm 1)$, où ε peut ou non changer de signe pour $y = \eta$, *sont des noyaux fermés* $\left(\text{pour } \lambda = \frac{1}{2}\text{, il faudrait utiliser l'équation } \delta z = 0 \text{ et son adjointe}\right)$.

Le théorème de M. Picard donne la condition de résolution de l'équation (11) : il y aurait là sans doute un point à approfondir.

L'étude du raccordement pour l'équation $(\overline{e}_1)$ à second membre est tout à fait analogue : *la fonction* Φ *seule a changé*.

On peut également se proposer de résoudre le problème du raccordement pour un contour *fermé* coupant Oy. Si AB ou A'B' se ré-

duisent à un point, un examen spécial est nécessaire : il conviendrait d'envisager des *séries de solutions* comme au paragraphe **25**.

II. — Cas où la ligne singulière est caractéristique.

Nous allons donner quelques indications sommaires sur les équations du type $(\bar{\mathcal{E}}')$ indiqué dans le paragraphe **65**.

69. Solution fondamentale. — Envisageons tout d'abord l'équation $(\bar{e}')$, p. 108; le changement de variable $y' = \dfrac{-\varepsilon}{(p-1)y^{p-1}}$ ramène cette équation à la forme $\delta z = 0$, pour $p \neq 1$.

La solution fondamentale est donc

$$U(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\eta^{p-1}} - \dfrac{\varepsilon}{y^{p-1}}}} e^{-\frac{(p-1)(x-\xi)^2}{4\varepsilon\left(\frac{1}{\eta^{p-1}} - \frac{1}{y^{p-1}}\right)}}.$$

Dans le cas où $p = 1$, cette solution est

$$U = \left(\varepsilon \mathcal{L} \frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon \mathcal{L} \frac{y}{\eta}}}.$$

L'introduction du nombre $\varepsilon = \pm 1$ a ici une *grande importance :* envisageons, en effet, le cas de $p = 1$, par exemple, et soient les équations

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \mathcal{F}_1(u) = \frac{1}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

dont la seconde est l'adjointe de la première. Pour l'équation $\mathcal{F} = 0$, le contour portant les données doit être ouvert *vers le haut* s'il est *au-dessus de* Oy, *vers le bas* s'il est *au-dessous;* c'est l'inverse qui a lieu pour l'équation $\mathcal{F}_1 = 0$, de sorte qu'on peut se proposer de calculer une solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ *de part et d'autre de* Ox, le contour total portant les données *étant fermé et coupant* Ox.

Examinons tout d'abord l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$ et proposons-nous de voir ce qui se passe quand le contour (C) est *limité inférieurement par* Ox. Si nous envisageons les équations $\mathcal{F} = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 0$, la *formule*

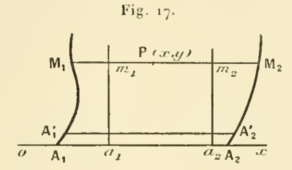
fondamentale est ici, pour un point intérieur (*fig.* 17),

$$2\sqrt{\pi}\, z(x, y) = \int_{(C'_y)} \left(\mathcal{L}\frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}} \left[z\, d\xi + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{x-\xi}{2\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}\right)\frac{d\eta}{\eta} \right],$$

(C') étant un contour limité inférieurement par une caractéristique $A'_1 A'_2$ voisine de Ox et d'ordonnée β, et (C'_y) la partie de ce contour située au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y.

Si β tend vers zéro, l'ensemble des intégrales qui figurent dans le

Fig. 17.



second membre conserve un sens, mais l'intégrale relative à $A'_1 A'_2$ *tend vers zéro*. Ceci suppose, il est vrai, que $\frac{\partial z}{\partial x}$ *existe* sur le contour. Mais nous pouvons choisir un contour intérieur à (C) et sur lequel $\frac{\partial z}{\partial x}$ existera, par exemple un contour rectangulaire $m_1 a_1 a_2 m_2$ contenant le point P, si P est suffisamment voisin de Ox; cependant, $\frac{\partial z}{\partial x}$ peut admettre une discontinuité en a_1 et a_2, mais l'ensemble des intégrales portant sur $\frac{\partial z}{\partial x}$ doit avoir un sens, car toutes les autres quantités qui figurent dans la formule ont une limite quand β tend vers zéro.

On pourrait d'ailleurs, en formant la *fonction de Green*, faire disparaître les termes en $\frac{\partial z}{\partial x}$; mais, pour ne pas allonger cet exposé, nous allons supposer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ *existe en* a_1 *et* a_2 : disons simplement que *cette hypothèse n'est nullement indispensable* (voir p. 126 en note).

Posons alors $z = z' + z_0$; z sera nul en a_1 et a_2 (d'abscisses x_1 et x_2), si z_0 désigne la fonction linéaire en x, solution de l'équation $(\overline{e'})$, et coïncidant avec les données en a_1 et a_2. Nous trouvons alors, en déri-

vant la formule fondamentale appliquée à z' et au contour $m_1 a_1 a_2 m_2$,

$$(12)\quad 2\sqrt{\pi}\,\frac{\partial z'}{\partial x}(x, y) = -\int_0^y \left(\mathcal{L}\frac{y}{\eta}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}}\left(\frac{\partial z'}{\partial \xi} - \frac{x - x_1}{2\mathcal{L}\frac{y}{\eta}} z'\right)\right]\frac{d\eta}{\eta}$$

$$+ \text{ une autre intégrale relative à } a_2 m_2.$$

Si l'on suppose $\frac{\partial z}{\partial x}$ continue en a_1 sur $a_1 m_1$, on peut prendre y assez petit pour que $\frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, y) = \frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, 0) + \zeta$, avec $|\zeta| < \varepsilon$. Substituons dans (12) et remarquons qu'un changement de variable immédiat nous donne

$$\int_0^y \left(\mathcal{L}\frac{y}{\eta}\right)^{-n-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4\mathcal{L}\frac{y}{\eta}}}\,\frac{d\eta}{\eta}$$
$$= \left(\frac{2}{x - x_1}\right)^{2n-1}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2^{2n-1}\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{(x - x_1)^{2n-1}}.$$

On déduit de là (ici $n = 1, 2$) que les intégrales portant sur z' et ζ ont une limite nulle quand y tend vers zéro, et que $\frac{\partial z'}{\partial x}$ tend vers $\frac{1}{2}\left[\frac{\partial z'}{\partial x}(x_1, 0) + \frac{\partial z'}{\partial x}(x_2, 0)\right] = \text{const.}$ à l'intérieur de $a_1 a_2$; $z'(x, 0)$, fonction linéaire entre a_1 et a_2, continue et nulle en a_1 et a_2, est donc identiquement nulle. Par suite *z se réduit à z_0 sur Ox* (1).

Ce résultat est vrai pour toutes les équations $(\bar{e}')$ et nous pouvons

---

(1) On peut aussi démontrer cela, sans utiliser la fonction de Green, en supposant $\frac{\partial z}{\partial x}$ continue en a_1 seulement : il suffit d'appliquer la formule fondamentale à P et à son symétrique par rapport à m_2 et de retrancher, pour voir que z' tend vers zéro avec y. Quant à la fonction de Green, elle permettrait d'avoir z' sous la forme $\frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int_{m_1 a_1 + a_2 m_2} z'\frac{\partial G}{\partial \xi}\,d\eta$: or, pour calculer $\frac{\partial G}{\partial \xi}$, il suffit de remplacer, dans les formules (1′) et (1″) du premier Mémoire (p. 466), $y - \eta$ et $\eta - s$ par $\mathcal{L}\frac{y}{\eta}$ et $\mathcal{L}\frac{\eta}{s}$, $d\eta$ et ds par $\frac{d\eta}{\eta}$ et $\frac{ds}{s}$. On constate alors sans difficulté que z' tend vers zéro, quand P tend vers Ox, sans avoir d'hypothèses à faire sur $\frac{\partial z}{\partial x}$.

énoncer la propriété suivante : *si une solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

régulière d'un certain côté de Ox, *se réduit sur* Ox *à une fonction continue, celle-ci ne peut être que linéaire.*

70. Problèmes aux limites. — *Si p est pair*, le contour portant les données pourra *traverser* Ox : supposons par exemple $\varepsilon = +1$, le contour sera alors ouvert *vers le haut*. Nous pourrons résoudre le problème aux limites pour la partie du contour située *au-dessous* de Ox. Sur Ox même, la solution se réduit à une fonction linéaire qui se déduit immédiatement des valeurs connues de z $\left(\text{ou } \frac{\partial z}{\partial x}\text{, suivant le problème}\right)$ en A_1 et A_2. Pour le contour formé par A_1A_2 et la partie de (C) située au-dessus de Ox, nous aurons un nouveau problème aux limites. *Les valeurs prises par la solution au-dessus de* Ox *sont donc indépendantes des valeurs prises au-dessous;* d'ailleurs on se rend compte sans peine que leur ensemble constitue une solution régulière, pourvu que les données constituent une fonction de *y dérivable en* A_1 *et* A_2 (le contour étant supposé non tangent à Ox).

Si p est impair et $\varepsilon = -1$, on pourra constituer une solution régulière à l'intérieur d'une bande *ouverte dans les deux sens*, toujours avec la même condition en A_1 et A_2 : cette solution sera constituée par l'ensemble de deux solutions relatives à deux contours accolés suivant Ox; ils peuvent d'ailleurs ne pas rencontrer Ox aux mêmes points, si les valeurs des données et de leurs dérivées en ces points sont convenablement choisies.

Enfin si p est impair et $\varepsilon = +1$, les deux contours séparés par Ox s'ouvrent *l'un vers l'autre :* leur ensemble peut constituer un contour *fermé* coupant Ox en A_1 et A_2. On voit alors *qu'on pourra résoudre pour le contour total un véritable problème de Dirichlet;* la valeur de la solution sur Ox s'obtiendra par *interpolation linéaire* entre les valeurs prises en A_1 et A_2. Ce contour pourra admettre des tangentes horizontales aux points le plus haut et le plus bas, d'après ce que nous avons vu dans le Chapitre II.

Ces résultats s'étendent à l'équation

$$(\overline{e}'_1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \varepsilon y^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

et à l'équation générale $(\overline{\mathcal{E}}')$ (§ 65, II). En ce qui concerne $(\overline{e}'_1)$, l'intégrale double formée avec la solution fondamentale n'aura de sens que si $f(x, 0) = 0$, en supposant de plus un certain mode de continuité, par exemple $|f| < \mathrm{K}y^\alpha$ ou $\mathrm{K}|\mathcal{L}y|^{-1-\alpha}$, pour y voisin de zéro. Si $f(x, 0) \neq 0$, on posera $z = z' + z_0$, z_0 étant solution de $\frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, 0)$. En définitive *toute solution de* $(\overline{\mathcal{E}}')$, *régulière d'un certain côté de* Ox *et continue sur* Ox, *se réduit sur* Ox *à une solution de l'équation*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a(x, 0)\frac{dz}{dx} + c(x, 0)z + f(x, 0) = 0.$$

III. — Nature des solutions.

Il est manifeste que, dans toute région non traversée par Oy, les solutions régulières de l'équation $(\overline{e})$, étudiée dans la section I, sont par rapport à l'ensemble (x, y) des fonctions *analytiques en* x *et d'espèce* $\mathcal{H}$ *en* y. Ceci résulte de ce que nous avons vu dans le Chapitre III [1]. Supposons maintenant que la région envisagée soit traversée par Oy et étudions la nature de la solution sur Oy.

---

[1] Voir § 53, pages 441 et suivantes. Il convient d'ailleurs de modifier légèrement la démonstration donnée à cet endroit : elle ne serait rigoureuse que si l'on avait $a \equiv 0$, car, si $a \not\equiv 0$, la dérivée $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ contient $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$, dont on veut précisément obtenir la limitation. Par suite, si la dérivée $\frac{\partial a}{\partial x}$ est d'espèce $\mathcal{H}$ en y, le changement d'inconnue indiqué au paragraphe 17 permet de ramener l'équation $(\mathcal{E})$ à la forme $\delta z = cz + f$, c et f étant d'espèce $\mathcal{H}$ en y, et la démonstration s'applique. Mais si $\frac{\partial a}{\partial x}$ n'est pas une fonction $\mathcal{H}$, il faut supposer les limitations de la page 441, ligne 10, établies pour $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ et $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x \partial y^n}$ et remplacer, dans la suite de la démonstration, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ par $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ce

71. Étude de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ quand p est pair. Problème de Cauchy. — Examinons d'abord le cas où *p est pair* et figurons un contour rectangulaire compris dans la région étudiée et traversé par Oy. Si nous appliquons à ce contour la formule (5), p. 111, nous obtenons, en supposant A_1A_2 sur Ox et $y \leq y_1$ ($\overline{OA_1} = -l$, $\overline{OA_2} = l$)

$$(13)\quad 2q^{1-\frac{2}{q}}\Gamma\left(1-\frac{1}{q}\right)z(0,y) = \int_{-l}^{+l} \frac{\xi^p z}{y^{1-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi q}{q^2 y}} d\xi$$
$$+ \int_0^y \frac{e^{-\frac{lq}{q^2(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{1-\frac{1}{q}}} \left[\frac{\partial z}{\partial \xi}(l,\eta) - \frac{\partial z}{\partial \xi}(-l,\eta)\right] d\eta$$
$$+ \int_0^y \frac{l^{q-1}}{q(y-\eta)^{2-\frac{1}{q}}} e^{-\frac{lq}{q^2(y-\eta)}} [z(l,\eta) + z(-l,\eta)]\, d\eta.$$

Or ceci est une fonction $\mathcal{H}$ de y pour $0 < y \leq y_1$, car ces intégrales sont analogues à celles qu'on rencontre dans l'étude de l'équation de la chaleur ([1]). Il en résulte que z est bien *une fonction* $\mathcal{H}$ *de* y *dans toute la région* et il suffit de dériver la formule (5) par rapport à x, avant de l'appliquer à un point de l'axe des y, pour démontrer que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est aussi une fonction $\mathcal{H}$.

Nous concluons de là que z est *analytique en* x dans toute la région : sans doute il serait facile de le constater sur la formule (5), mais nous allons le voir ici en cherchant à résoudre *le problème de Cauchy pour l'axe des* y. Soit, sur Oy, $z(0, y) = \varphi(y)$ et $\frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = \psi(y)$.

---

qui conduit à la limitation commune de $\frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^{n+1}}$ et $\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x \partial y^{n+1}}$. Avec cette modification, la formule (9) donne une limitation commune à $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, en supposant $|u|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < [U]$, ce qui est conforme à l'application que nous en faisons. Je reviendrai d'ailleurs sur ces questions dans un prochain Mémoire, développement de la Note parue aux *Comptes rendus* du 8 décembre 1913. Dans cette Note sont définies les fonctions de *classe* donnée : *les fonctions* $\mathcal{H}$ *sont les fonctions de classe* 2.

([1]) Nous supposons ici, et dans tout ce qui va suivre, *p entier*.

Posons

$$z = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \ldots .$$

Portant dans (e), nous obtenons pour déterminer les z_p,

$$\begin{gathered} z_0 = \varphi, \qquad z_1 = \psi, \qquad z_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad z_{p+1} = 0, \\ (p+1)(p+2) z_{p+2} = z'_0, \qquad (p+2)(p+3) z_{p+3} = z'_1, \\ z_{p+4} = 0, \qquad \ldots, \qquad z_{2p+3} = 0, \qquad (2p+3)(2p+4) z_{2p+4} = z'_{p+2}, \\ (2p+4)(2p+5) z_{2p+5} = z'_{p+3}, \quad \ldots . \end{gathered}$$

En posant toujours $p + 2 = q$, nous trouvons ainsi

$$\begin{gathered} z_{kq} = \frac{1}{(q-1)q.(2q-1)2q\ldots(kq-1)kq} \frac{d^k \varphi}{dy^k}, \\ z_{kq+1} = \frac{1}{q(q+1).2q(2q+1)\ldots kq(kq+1)} \frac{d^k \psi}{dy^k}, \\ z_{kq+h} = 0 \; (h = 2, 3, \ldots, q-1). \end{gathered}$$

On peut donc écrire

$$(14) \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{kq}}{q^k k!} \left[\frac{1}{(q-1)(2q-1)\ldots(kq-1)} \frac{d^k \varphi}{dy^k} + \frac{x}{(q+1)\ldots(kq+1)} \frac{d^k \psi}{dy^k} \right].$$

Si φ et ψ sont des fonctions $\mathcal{H}_R$, c'est-à-dire si l'on a

$$\left| \frac{d^k \varphi}{dy^k} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{d^k \psi}{dy^k} \right| < \frac{M (2k)!}{R^k},$$

on voit immédiatement que la série entière (14) sera convergente pour $|x| < \left(\frac{q^2 R}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$: on a donc bien une *fonction analytique de x*. Réciproquement, toute solution z, analytique en x dans le domaine de $x = 0$ [1], se réduit sur Oy, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, à une fonction $\mathcal{H}$: la démonstration serait immédiate. Dans le cas où l'on suppose que φ et ψ sont analytiques, on constate que z est une *fonction entière en x d'ordre $\leq q$* (on a $|z| < e^{M|x|^q}$).

Ce qui précède montre également que *la condition nécessaire et*

[1] Par exemple, les intégrales de la formule (13) [*voir* § **43**, deuxième note] : ceci constitue un moyen de montrer que ce sont des fonctions $\mathcal{H}$ en y.

suffisante, pour qu'une solution définie d'un côté de Oy soit prolongeable au delà, est qu'elle prenne sur Oy des valeurs constituant une fonction $\mathcal{K}$ (*cf.* § 57).

Mais les raisonnements précédents (sauf en ce qui concerne le problème de Cauchy) ne s'appliquent plus au cas où p est impair.

72. Cas où p est impair. — Soit z une solution régulière de l'équation $(\overline{e})$ (p impair) dans une région $\mathcal{R}$ traversée par Oy, A et A′ deux points sur Oy et dans $\mathcal{R}$, et où l'on peut supposer z nulle; nous allons montrer que z *est une fonction* $\mathcal{K}$ *sur* AA′.

En effet, prenons un contour tel que celui de la figure 16, p. 119, situé dans la région $\mathcal{R}$ (nous pouvons même ici supposer que les arcs BC, B′C′ sont des segments de droites parallèles à Oy). Si nous appliquons la formule (9) au contour A′ABC et la formule analogue au contour AA′B′C′ et si nous égalons les seconds membres, nous trouvons une équation de la forme

$$\int_a^{a'} \frac{\partial z(0, \eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} = \mathrm{F}(y),$$

F étant une fonction qui se compose de termes tout à fait analogues à ceux qui figurent dans l'équation (13); c'est donc une *fonction* $\mathcal{K}$ *à l'intérieur* de l'intervalle (a, a') (les dérivées cessent d'exister pour les bornes). Puisque z s'annule en A et A′, l'équation peut s'écrire

$$\frac{d}{dy}\int_a^{a'} \frac{z(0, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} d\eta = \mathrm{F}(y), \quad \text{d'où} \quad \int_a^{a'} \frac{z(0, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} d\eta = \mathrm{F}_1(y),$$

F_1 étant une nouvelle fonction $\mathcal{K}$. Or on peut toujours déterminer une fonction $v(x, y)$ — par exemple une solution de $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ —, égale à z sur AB, A′C, *nulle* sur AA′ et *analytique en* x, y autour de tout point intérieur à AA′. Envisageons alors la fonction

$$\zeta(x, y) = \int_a^{a'} \frac{z_1(x, \eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} d\eta, \tag{15}$$

avec $z_1 = z - v$ (z_1 s'annule sur AB, A'C). Nous avons

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\int_a^{a'} \left[\frac{\partial^2 v(x,\eta)}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial v(x,\eta)}{\partial \eta}\right] \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} = \Phi(x,y).$$

Nous voyons donc que ζ est une solution d'une équation $(\overline{e_1})$ à second membre, et cette solution se réduit sur Oy à $F_1(y)$, c'est-à-dire à une fonction $\mathcal{K}$. Or la formule analogue à (9), appliquée à une équation $(\overline{e_1})$ à second membre d'espèce $\mathcal{K}$ en y, montre que, quand une solution se réduit sur Oy à une fonction $\mathcal{K}$, il en est de même de sa dérivée par rapport à x, le deuxième membre de la formule (9) étant alors une telle fonction. Or, le second membre Φ de l'équation en ζ est analytique en x et aussi en y autour des points intérieurs à AA'. Il résulte alors des paragraphes **71** et **73** [solution du problème de Cauchy par les formules (14) et (16)] que, $\zeta(x,y)$ et $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ prenant sur Oy des valeurs définissant des fonctions $\mathcal{K}$, ζ sera une *fonction analytique de x dans le voisinage de Oy*.

Montrons qu'il en sera de même pour z_1. Ainsi nous sommes ramenés à la propriété suivante : si, dans l'équation (15), ζ est une fonction *holomorphe de x* dans un certain domaine pour les valeurs de y comprises entre a et a', *z_1 jouit de la même propriété*. Soit, en effet, une courbe fermée Γ tracée dans le domaine de la variable x, nous aurons

$$\int_\Gamma \zeta(\xi,y)\,d\xi = \int_\Gamma d\xi \int_a^{a'} \frac{z_1(\xi,\eta)}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}}\,d\eta = 0.$$

Mais le deuxième membre peut s'écrire

$$\int_a^{a'} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\frac{1}{q}}} \int_\Gamma z_1(\xi,\eta)\,d\xi = 0.$$

Or $(y-\eta)^{-\frac{1}{q}}$ est un *noyau fermé :* donc, quelle que soit Γ,

$$\int_\Gamma z_1(\xi,\eta)\,d\xi = 0. \qquad (a < \eta < a')$$

et, d'après la réciproque du théorème de Cauchy, z_1 est analytique

dans les mêmes conditions que ζ. Mais alors, v étant analytique en x au voisinage de $x = 0$, z l'est aussi et par suite (§ **71**) se réduit sur Oy à une fonction $\mathcal{K}$ de y : nous pouvons donc énoncer le même théorème qu'à la fin du paragraphe **71**.

75. ÉTUDE DE L'ÉQUATION $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$. — Envisageons maintenant l'équation $(\overline{e}_1)$ avec second membre $f(x, y)$ d'espèce $\mathcal{K}$ en y et supposons d'abord p pair. La solution Z (§ **67**) est fonction $\mathcal{K}$ en tout point *extérieur* à Oy, car ceci résulte du paragraphe **55**. *Sur* Oy *même*, elle se réduit à une fonction $\mathcal{K}$, car pour $x = 0$ nous obtenons, à un facteur près, la fonction

$$\iint_{S_2} \frac{1}{|y-\eta|^{\frac{1}{q}}} e^{-\frac{\xi^q}{q^2(y-\eta)}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

dont les dérivées, par rapport à y, se calculent par la même méthode que celle que nous avons déjà suivie au paragraphe **55**, ce qui permet aisément de voir que cette fonction est d'espèce $\mathcal{K}$ ([1]).

Nous pouvons également nous proposer, p étant cette fois un entier positif quelconque, de calculer la solution de l'équation qui *s'annule sur* Oy, *ainsi que sa dérivée par rapport à* x. Supposons tout d'abord que f soit, ainsi que z, développable par la formule de Mac Laurin

$$f = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots,$$

les f étant fonctions de y. Le procédé d'identification déjà suivi dans le paragraphe **71** nous donne ici, en posant toujours $p + 2 = q$,

$$z_0 = z_1 = 0, \qquad 2z_2 = f_0, \qquad \ldots, \qquad q(q+1)z_{q+1} = f_{q-1},$$
$$(q+1)(q+2)z_{q+2} = z'_2 + f_q, \qquad \ldots,$$
$$(\lambda q + h + 1)(\lambda q + h + 2)z_{\lambda q+h+2} = z'_{\lambda q+h} + f_{\lambda q+h} \qquad (h = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Si nous explicitons les z en fonction des f et si nous réunissons dans la série les termes contenant les dérivées d'ordre λ des fonctions f

---

([1]) Il pourrait se faire que, z étant une fonction $\mathcal{K}_R$, R tende vers zéro, puis éprouve une discontinuité pour $x = 0$. Cela n'est pas, comme nous le verrons par la suite.

par rapport à y, il vient

$$x^{\lambda q+2}\left\{\frac{f_0^{(\lambda)}}{1.2.(q+1)(q+2)\ldots(\lambda q+1)(\lambda q+2)}\right.$$
$$+\frac{xf_1^{(\lambda)}}{2.3\ldots(\lambda q+2)(\lambda q+3)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{x^{q-1}f_{q-1}^{(\lambda)}}{q(q+1)\ldots(\lambda+1)q[(\lambda+1)q+1]}+\ldots$$
$$+\frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{(r+1)(r+2)\ldots(\lambda q+r+1)(\lambda q+r+2)}$$
$$\left.+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$f_r^{(\lambda)}=\frac{1}{r!}\,\frac{\partial^{r+\lambda}f(0,y)}{\partial x^r\,\partial y^\lambda};$$

de sorte que le terme envisagé peut s'écrire, r variant de 0 à ∞,

$$\frac{x^{\lambda q+2}}{q^{2\lambda+2}}\sum_r\frac{1}{r!}\,\frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{\left(\frac{r+1}{q}\right)\left(1+\frac{r+1}{q}\right)\left(2+\frac{r+1}{q}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{r+1}{q}\right)\cdot\left(\frac{r+2}{q}\right)\cdots\left(\lambda+\frac{r+2}{q}\right)}$$
$$=\frac{x^{\lambda q+2}}{q^{2\lambda+2}}\,\frac{1}{|\lambda!|^2}\sum_r\frac{x^r f_r^{(\lambda)}}{r!}\;\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{q}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+1+\frac{r+1}{q}\right)}\;\frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{q}\right)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+1+\frac{r+2}{q}\right)}.$$

Les deux derniers facteurs sont $B\left(\frac{r+1}{q},\lambda+1\right)B\left(\frac{r+2}{q},\lambda+1\right)$ et notre terme s'écrit, en explicitant les B,

$$\frac{x^2}{q^2}\int_0^1\int_0^1\left[\frac{(1-s)(1-t)x^q}{q^2}\right]^\lambda\frac{1}{|\lambda!|^2}\,s^{\frac{1}{q}-1}\,t^{\frac{2}{q}-1}\sum_r\frac{\left(x\,s^{\frac{1}{q}}t^{\frac{1}{q}}\right)^r}{r!}\,\frac{\partial^{r+\lambda}f(0,y)}{\partial x^r\,\partial y^\lambda}.$$

La somme $\sum\limits_r$ (r variant de 0 à ∞) est un développement de Taylor et, sommant par rapport à λ, nous trouvons en définitive

$$Z_0=\frac{x^2}{q^2}\int_0^1\int_0^1\sum_\lambda\left[\frac{(1-s)(1-t)x^q}{q^2}\right]^\lambda\frac{1}{|\lambda!|^2}\,s^{\frac{1}{q}-1}\,t^{\frac{2}{q}-1}\,\frac{\partial^\lambda f\left(t^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{q}}x,\,y\right)}{\partial y^\lambda}\,ds\,dt$$

et, en posant $t = \left(\frac{\xi}{x}\right)^q$, $s = \left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^q$,

$$(16) \qquad Z_0 = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \sum_\lambda \frac{1}{|\lambda!|^2} \left[\frac{(x^q - \xi^q)(\xi^q - \xi'^q)}{q^2 \xi^q}\right]^\lambda \frac{\partial^\lambda f(\xi', y)}{\partial y^\lambda} d\xi'$$

ou encore, par un changement dans l'ordre d'intégration,

$$(16') \qquad Z_0 = \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^\lambda f(\xi, y)}{\partial y^\lambda} \varphi_\lambda(x, \xi)\, d\xi,$$

en posant

$$\varphi_\lambda(x, \xi) = \frac{1}{|\lambda!|^2} \int_\xi^x \left[\frac{(x^q - \xi'^q)(\xi'^q - \xi^q)}{q^2 \xi'^q}\right]^\lambda d\xi'.$$

Sous cette forme, la solution est facile à vérifier : on trouve en effet

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} = f(x, y) + \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}(x, \xi)}{\partial x^2} d\xi,$$

$$\frac{\partial Z_0}{\partial y} = \int_0^x \sum_\lambda \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} \varphi_\lambda(x, \xi)\, d\xi;$$

d'où

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 Z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial Z_0}{\partial y} = f(x, y) + \int_0^x \sum_\lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2} \varphi_\lambda\right) \frac{\partial^{\lambda+1} f(\xi, y)}{\partial y^{\lambda+1}} d\xi.$$

Il suffit donc de vérifier que

$$(18) \qquad \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} \equiv x^{q-2} \varphi_\lambda.$$

Au lieu d'établir directement l'identité (18), supposons que nous ayons vérifié les λ identités précédentes et prenons $f = x^n y^{\lambda+1}$, n étant un nombre *entier positif* quelconque : les calculs que nous avons faits *formellement* sont alors certainement valables et la solution est bien représentée par la formule (16), quel que soit n. Il en résulte que, d'après la formule (17), on a certainement, tous les autres termes de l'intégrale du second membre étant nuls par hypothèse,

$$(\lambda + 1)! \int_0^x \left(\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2} \varphi_\lambda\right) \xi^n d\xi = 0,$$

pour n entier et positif. Or la parenthèse est un polynome *homogène* et de degré $(\lambda + 1)q - 1$ en x et ξ, de la forme $\sum A_\mu x^m \xi^\mu$, de sorte qu'on

aura en intégrant

$$\int_0^x \sum A_\mu x^m \xi^{\mu+n} d\xi = x^{(\lambda+1)q+n} \sum \frac{A_\mu}{\mu+n+1} = 0,$$

quel que soit n entier et positif, et par suite *quel que soit n*. Ceci exige (à cause des pôles) que tous les coefficients A_μ soient nuls, c'est-à-dire que $\frac{\partial^2 \varphi_{\lambda+1}}{\partial x^2} - x^{q-2} \varphi_\lambda \equiv 0$. Ce raisonnement s'appliquant aussi au cas de $\lambda = 0$, la relation est démontrée quel que soit λ.

Avec la formule (16) ou (16'), nous n'avons *plus d'hypothèse à faire sur la nature de f* relativement à la variable x. Nous voyons sans peine que, *si f est une fonction $\mathcal{H}_R$ en y* pour $|x| < \rho$, la série sera convergente pour $|x|$ inférieur au plus petit des deux nombres ρ et $\left(\frac{q^2 R}{4}\right)^{\frac{1}{q}}$ et la solution Z_0 *sera elle-même une fonction* $\mathcal{H}$: il suffirait de reproduire ici un calcul analogue à celui que nous avons déjà fait (§ 55). Pareillement, cette formule donne le moyen de déterminer par *approximations successives* la solution *du problème de Cauchy* pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x} + c z + f,$$

quand les données, supposées d'espèce $\mathcal{H}$, sont portées par un segment de Oy. Il suffit de ramener ces données à zéro, absolument comme nous l'avons déjà fait plus haut (§ 56). En ce qui concerne l'équation $(\overline{e}_1)$, la solution du problème de Cauchy s'obtient en ajoutant les formules (14) et (16) : elle est analytique en x si f l'est.

Ce que nous venons de faire ne préjuge rien sur la nature du nombre entier positif p. Comme nous avons trouvé une solution de l'équation $(\overline{e}_1)$ qui est une fonction $\mathcal{H}$, il en résulte que *toutes les solutions régulières sont de cette nature*, quel que soit le nombre entier positif p, puisque cette propriété est vraie pour l'équation $(\overline{e})$.

74. Énoncé de quelques résultats. — Les calculs précédents et le problème du raccordement, que nous traiterons dans le paragraphe **79**, nous fournissent les éléments nécessaires à la démonstration des propriétés suivantes, que je me borne à énoncer. Étant donnée l'équation $(\overline{\mathcal{E}})$, où p est entier, et une solution z, régulière dans une région $\mathcal{R}$

pouvant être traversée par Oy : 1° si les coefficients sont dans la région $\mathfrak{R}$ ou bien analytiques en x, ou bien d'espèce $\mathfrak{K}$ en y, z sera ou bien analytique en x, ou bien d'espèce $\mathfrak{K}$ en y; 2° si les coefficients sont analytiques en y et si z prend sur deux segments C_1, C_2, parallèles à Oy, une succession de valeurs analytiques en y, z sera analytique en y, sur tout segment de caractéristique limité par C_1 et C_2. Même théorème pour l'analyticité en x et y, C_1 et C_2 pouvant alors être des arcs analytiques; 3° quand les coefficients sont d'espèce $\mathfrak{K}$ en y, la condition nécessaire et suffisante pour que z soit prolongeable au delà de Oy est que $z(0, y)$ soit d'espèce $\mathfrak{K}$ en y.

Il serait facile de déduire de là des propriétés relatives à l'équation générale, dans laquelle b peut s'annuler le long de courbes $x = \varphi(y)$ quelconques (pour ce qui concerne l'analyticité en x), ou d'espèce $\mathfrak{K}$ (pour ce qui concerne l'espèce $\mathfrak{K}$ et pour le prolongement en y), ou analytiques (pour ce qui concerne l'analyticité en x et y).

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici des solutions des équations $(\overline{\mathcal{E}'})$. Remarquons que les solutions régulières de l'équation $(\overline{e'})$ *ne sont pas en général des fonctions* $\mathfrak{K}$ pour les points situés sur Ox. Cependant, si z est une fonction $\mathfrak{K}$ en deux points A_1, A_2 de Ox, cette solution sera une fonction $\mathfrak{K}$ dans la région commune au domaine, où z est régulière, et à la bande comprise entre les parallèles à Oy menées par les deux points A_1 et A_2.

Des remarques analogues s'appliquent à l'équation $(\overline{\mathcal{E}'})$. Pour cette équation, d'ailleurs, les théorèmes relatifs à l'analyticité par rapport à x ou y subsistent sans modifications.

CHAPITRE V.

LA SOLUTION FONDAMENTALE ET SES APPLICATIONS.

I. — Équations du type normal.

Étant donnée l'équation (E) (p. 105) avec $f = 0$, c'est-à-dire

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \qquad (b < 0).$$

M. Hadamard a formé sa solution fondamentale (*Comptes rendus*,

1er mai 1911) en ramenant cette équation à la forme (*voir* § **17**)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = c z.$$

Outre les hypothèses de dérivabilité que ceci exige, le procédé de réduction est spécial *au cas de deux variables* (¹). Nous allons faire l'extension de la méthode de M. Hadamard au cas général.

75. Solution fondamentale de l'équation a deux variables. — Remarquons tout d'abord que, l'équation (E) étant donnée, la solution fondamentale que nous devons utiliser est celle de l'équation *adjointe*. Nous aurons donc, en supposant (E) mise sous la forme normale (§ **17**), les deux équations

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + cz + f = 0.$$

$$\mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial a u}{\partial x} + cu \qquad = 0.$$

Envisageons ces équations dans une région $\mathcal{R}$, où leurs coefficients sont supposés *continus*, et admettons, pour plus de simplicité (hypothèse nullement indispensable), que $\mathcal{R}$ soit définie par $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$. Pour former la solution fondamentale $U(\xi, \eta; x, y)$, solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ en ξ, η, nous allons suivre l'ingénieuse méthode indiquée par M. Hadamard. Opérant par *approximations successives*, nous poserons

$$U_0(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

et d'une façon générale, à partir de $n = 1$ (²),

$$U_n(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} dt \int_{x_1}^{x_2} \left[-\frac{\partial a(s,t) U_{n-1}(s, t; x, y)}{\partial s} + c U_{n-1} \right] \frac{1}{\sqrt{t-\eta}} e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4(t-\eta)}} ds,$$

les points $P(x, y)$ et $H(\xi, \eta)$ étant situés dans $\mathcal{R}$ et tels que $\eta < y$.

(¹) Mais il va sans dire qu'il sera avantageux de l'employer chaque fois que la chose sera possible.

(²) Ceci revient en somme à considérer la solution fondamentale cherchée U comme solution d'une équation intégrale qui s'écrit immédiatement.

Or nous pouvons écrire, en désignant par m_1, m_2 des points variables d'abscisses x_1, x_2 et m un point du domaine d'intégration,

$$\begin{aligned} U_n = &\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\eta^y a(m_1)\, U_{n-1}(m_1, P)\, U_0(H, m_1)\, dt \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\eta^y a(m_2)\, U_{n-1}(m_2, P)\, U_0(H, m_2)\, dt \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\eta^y dt \int_{x_1}^{x_2} \left[a(m)\frac{\partial U_0(H, m)}{\partial s} + c(m)\, U_0(H, m)\right] U_{n-1}(m, P)\, ds. \end{aligned}$$

Le terme U_1 (que le lecteur est prié d'écrire) est bien défini quand P et H sont distincts et, si $x \neq \xi$, il tend vers zéro avec $y - \eta$. Il s'agit de voir comment se comporte ce terme quand $x - \xi$ et $y - \eta$ *tendent simultanément vers zéro*. Soit $|a| < A$, $|c| < C$: les intégrales simples restent finies; la partie qui contient c ne présente aucune difficulté car elle est limitée par

$$C \int\int \frac{U_0(s, t; x, y)}{\sqrt{t - \eta}}\, ds\, dt < (K)\sqrt{y - \eta},$$

d'après les formules (23′) et (24′), § 8 (intégrales I_{pq}); enfin la partie de l'intégrale double portant sur a admet comme limitation

$$\frac{A}{2\sqrt{\pi}}\int_\eta^y dt \int_{x_1}^{x_2} \frac{|s - \xi|}{(y - t)^{\frac{1}{2}}(t - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4(t-\eta)}}\, ds,$$

intégrale toujours finie, d'après les mêmes formules.

U_1 est donc toujours fini et par suite U_2, qui se compose d'intégrales des types $\mathfrak{z}_0$ (§ 2), $I_{0\frac{1}{2}}$, $I_{1\frac{3}{2}}$ portant sur des fonctions bornées, est une fonction *continue dans* $\mathcal{R}$ et tend vers zéro avec $y - \eta$. De même pour les termes suivants, et il résulte de ce que nous avons vu, dans le Chapitre II, que *les approximations convergent* et que la série $U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ représente une solution de l'équation $\mathcal{F}_1 = 0$, en supposant bien entendu que les coefficients satisfassent aux conditions (A) (§ 9). Nous pouvons donc mettre U sous la forme $U = U_0 + V$, V étant une fonction bornée *pour tous les points* P et H de $\mathcal{R}$, même voisins, *continue et tendant vers zéro avec* $y - \eta$, sauf pour $\xi = x$. Si donc on intègre $|V|$ par rapport à ξ, l'intégrale s'annule avec $y - \eta$, même si l'intervalle contient la valeur x.

76. Application aux problèmes aux limites. — Étant données les équations $\mathcal{F} = 0$ et $\mathcal{F}_1 = 0$, appliquons la formule de Riemann à l'intégrale

$$\int\int \{ U \mathcal{F}[z(\xi, \eta)] - z(\xi, \eta) \mathcal{F}_1(U) \} \, d\xi \, d\eta$$

et au domaine limité par un contour (C) et la caractéristique $M_1 M_2$ et situé dans $\mathcal{R}$ (voir *fig.* 1, § I ou *fig.* 15, p. 110). Il vient

$$(1) \quad \int_{M'_1}^{M'_2} U z \, d\xi = \int_{M'_1 A_1 A_2 M'_2} \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} + a U z \right) d\eta + U z \, d\xi + \int\int U f \, d\xi \, d\eta.$$

Or

$$\int_{M'_1}^{M'_2} U z \, d\xi = \int_{M'_1}^{M'_2} U_0 z \, d\xi + \int_{M'_1}^{M'_2} V z \, d\xi.$$

Quand $M'_1 M'_2$ tend vers $M_1 M_2$, la dernière intégrale tend vers zéro, comme nous l'avons déjà dit. Donc (§ I), la limite du premier membre de (1) est $2\sqrt{\pi}\, z(x, y)$, $\sqrt{\pi}\, z(x, y)$ ou zéro suivant que M est à l'intérieur de (C), sur (C) ou à l'extérieur de (C). D'où la formule

$$\left. \begin{array}{c} 2\sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} \\ 0 \end{array} \right\} z(x, y) = \int\int_{(C_y)} \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} + a U z \right) d\eta + U z \, d\xi + \int\int_{S_y} U f \, d\xi \, d\eta,$$

(C_y) et S_y désignant les portions de (C) et de S situées au-dessous de la caractéristique d'ordonnée y. Dès lors, si l'on forme par la méthode des approximations successives une fonction H, solution de $\mathcal{F}_1 = 0$ en ξ, η, égale à $U(\xi, \eta; x, y)$ sur C_1 et C_2 et nulle sur $M_1 M_2$, la fonction $G = U - H$ sera une *fonction de Green* relativement au contour (C).

En appliquant la formule de Riemann à cette fonction, il vient, pour un point (x, y) intérieur,

$$2\sqrt{\pi}\, z(x, y) = \int_{(C_y)} - z \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta + G z \, d\xi + \int\int_{S_y} G f \, d\xi \, d\eta.$$

Il resterait à vérifier cette solution, car ceci nous montre simplement que, si la solution prenant sur (C) des valeurs données existe, elle est donnée par cette formule. Mais nous savons par ailleurs que cette solution existe, quand a, c, f satisfont aux conditions (A). Par suite,

la formule que nous venons de trouver *représente bien* la solution cherchée. En particulier, la fonction $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\int_{S_1} Gf\,d\xi\,d\eta$ représente la solution de $\mathcal{F}=0$, nulle au bord [1].

Il est à remarquer que cette méthode exige deux opérations : 1° *Calcul de la solution fondamentale*, indépendant du contour; 2° *Calcul de la fonction de Green* pour un contour donné, indépendant des données. Ce dernier calcul se fait par les méthodes du Chapitre II et exige le calcul de la fonction de Green pour $\delta z=0$ et la résolution d'une équation intégrale.

D'autre part, la méthode employée plus haut au paragraphe **22** n'exige qu'un calcul analogue au deuxième calcul que nous venons d'indiquer, mais ce calcul *varie avec les données*. Il peut donc y avoir avantage, suivant les cas, à employer l'une ou l'autre méthode.

77. Solution fondamentale des équations a plus de deux variables. — Le procédé que nous avons suivi pour former la solution fondamentale réussit également dans le cas où le nombre des variables est *supérieur à deux*. Envisageons, par exemple, dans le cas de *trois variables*, les deux équations

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}-\frac{\partial z}{\partial y}+a_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+cu+f=0.$$

$$\mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial a_1 u}{\partial x_1}-\frac{\partial a_2 u}{\partial x_2}+cu \qquad =0.$$

Supposons que la région $\mathcal{R}$, où nous voulons former la solution, soit située à l'intérieur d'une surface Σ, ouverte vers les y positifs et négatifs (par exemple un cylindre) et soient $\Sigma_{y,\eta}$ la portion de Σ comprise entre les plans caractéristiques de cote y et η, $V_{y,\eta}$ le volume limité par ces plans et par $\Sigma_{y,\eta}$. Nous effectuerons alors les opérations

(1) Moyennant des hypothèses très simples sur la nature des coefficients de l'équation à l'infini, on peut former une solution fondamentale valable dans tout le plan, ce qui permettra d'obtenir la solution prenant des valeurs données sur une caractéristique donnée.

Au sujet de la fonction de Green, remarquons enfin que la formule de Riemann nous donnerait aisément une *relation d'échange* entre la fonction de Green de l'équation et celle de son adjointe.

suivantes :

$$U_0(\xi_1, \xi_2, \eta;\, x_1, x_2, y) = \frac{1}{y-\eta} e^{-\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{4(y-\eta)}} = U_0(H, P).$$

$$U_n = \frac{1}{4\pi}\iiint_{V_{y,\eta}} \left[-\frac{\partial[a_1(m) U_{n-1}(m, P)]}{\partial s_1} - \frac{\partial a_2 U_{n-1}}{\partial s_2} + c U_{n-1} \right] U_0(H, m)\, d\Omega_m,$$

m étant le point (s_1, s_2, t) et $d\Omega_m$ l'élément de volume correspondant.

Le même procédé qui nous a servi dans le plan nous donne une intégrale double étendue à la surface $\Sigma_{y,\eta}$ et une intégrale triple

$$(2) \quad \frac{1}{4\pi}\iiint_{V_{y,\eta}} \left[a_1(m) \frac{\partial U_0(H, m)}{\partial s_1} + a_2 \frac{\partial U_0}{\partial s_2} + c U_0 \right] U_{n-1}(m, P)\, d\Omega_m.$$

Si nous portons notre attention sur le premier terme U_1, nous voyons tout d'abord que nous pouvons supposer, pour l'objet que nous avons en vue, que les points P et H ne sont pas tous deux sur $\Sigma_{y,\eta}$ et alors l'intégrale de surface, qu'il est inutile d'écrire, est comparable à une intégrale $I_{0,1}$ (§ **8**) et *reste finie :* elle tend vers zéro avec $y-\eta$.

Appelons J_1 *l'intégrale triple* (2), *lorsque* $n = 1$, et posons

$$(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 = r^2, \qquad (\xi_1 - s_1)^2 + (\xi_2 - s_2)^2 = \rho^2,$$

d'où

$$(s_1 - x_1)^2 + (s_2 - x_2)^2 \geqq (r-\rho)^2.$$

Remarquant que $|\xi_1 - s_1|$ et $|\xi_2 - s_2|$ sont $\leqq \rho$, on a donc, si $|a_1| < A_1$, $|a_2| < A_2$, $|c| < C$,

$$|J_1| < \frac{1}{4\pi}\iiint_{V_{y,\eta}} \left| (A_1 + A_2)\frac{\rho}{2(t-\eta)^2} + \frac{C}{t-\eta} \right| \frac{1}{y-t} e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} - \frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}}\, d\Omega_m.$$

L'emploi de coordonnées semi-polaires d'origine H nous donne

$$|J_1| < \frac{1}{2}\int_\eta^y \frac{dt}{(y-t)(t-\eta)} \int_0^{+\infty} \left[\frac{(A_1 + A_2)\rho}{2(t-\eta)} + C \right] e^{-\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} - \frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}} \rho\, d\rho.$$

Or, p et θ étant des nombres positifs, avec $0 < \theta < 1$, et α une variable > 0, on peut écrire $\alpha^p e^{-\alpha} < (K) e^{-\theta\alpha}$ [1]. Par suite, en appli-

---

[1] En effet l'expression $\alpha^p e^{-(1-\theta)\alpha}$ reste finie quel que soit $\alpha > 0$.

quant cette remarque à la première exponentielle, il vient

$$|J_1| < (K)\int_{\eta}^{y} \frac{dt}{(y-t)\sqrt{t-\eta}}\left(\frac{A_1+A_2}{\sqrt{t-\eta}}+C\right)\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta\rho^2}{4(t-\eta)}-\frac{(r-\rho)^2}{4(y-t)}}\,d\rho.$$

Or on a évidemment $\frac{A_1+A_2}{\sqrt{t-\eta}}+C < \frac{(K)}{\sqrt{t-\eta}}$, et si nous partageons le domaine d'intégration en quatre parties par les droites $\rho = \frac{r}{2}$ et $t = \frac{y+\eta}{2}$, nous obtenons quatre intégrales analogues, dont l'une est [1]

$$\int_{\eta}^{\frac{y+\eta}{2}}\int_0^{\frac{r}{2}} < (K)\,\frac{e^{-\frac{r^2}{16(y-\eta)}}}{y-\eta}\int_{\eta}^{\frac{y+\eta}{2}}\frac{dt}{t-\eta}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta\rho^2}{4(t-\eta)}}\,d\rho < \frac{(K)}{\sqrt{y-\eta}}\,e^{-\frac{r^2}{16(y-\eta)}},$$

et les trois autres admettent la même limitation. En définitive

$$|U_1| < \frac{(K)}{\sqrt{y-\eta}}\,e^{-\frac{\mu^2 r^2}{y-\eta}}.$$

On déduit de là que U_2 *reste fini* quelle que soit la position des points P et H, et tous les autres termes sont continus et tendent vers zéro avec $y-\eta$, même si $x-\xi$ tend vers zéro. De plus, la série $U_0+U_1+U_2+\ldots$ converge et représente donc une solution U de l'équation adjointe, qu'on peut mettre sous la forme $U = U_0 + V$, V étant une fonction telle que l'intégrale $\int\int_D |V|\,d\xi\,d\eta$ *tende vers zéro avec* $y-\eta$, quel que soit le domaine d'intégration D : ceci résulte de la limitation de U_1. On en déduit immédiatement la *formule fondamentale* relative à une solution de l'équation $\mathcal{F}(z)=0$. Si nous appliquons à l'intégrale $\int\int\int_{V_y} [u\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{F}_1(u)]\,d\Omega$ la marche suivie au paragraphe 55, en remplaçant u par U et tenant compte de la propriété de V, il vient, pour un point $P(x_1, x_2, y)$

---

[1] En remarquant que, dans le domaine d'intégration que nous allons envisager, on a $r-\rho > \frac{r}{2}$, et en utilisant les propriétés des intégrales I_{pq} (§ 8).

intérieur à (S) et avec les notations du paragraphe **55**,

$$4\pi z(x_1, x_2, y) = -\iint_{\Sigma_y}\left(U\frac{\partial z}{\partial\xi_1} - z\frac{\partial U}{\partial\xi_1} + a_1 U z\right) d\xi_2\, d\eta$$

$$+\left(U\frac{\partial z}{\partial\xi_2} - z\frac{\partial U}{\partial\xi_2} + a_2 U z\right) d\eta\, d\xi_1 - U z\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$+\iiint_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta$$

$$= -\iint_{\Sigma_y}\left\{U\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial U}{\partial n} + [a_1\cos(n, x_1) + a_2\cos(n, x_2)] U z\right\} d\sigma\, d\eta$$

$$+\iint_{\Sigma_y} U z\, d\xi_1\, d\xi_2 + \iiint_{V_y} U f(\xi_1, \xi_2, \eta)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta,$$

les intégrales de surface étant prises sur le côté intérieur.

Si la section inférieure S_0 ne se réduit pas à un point, nous pourrons calculer une *fonction de Green*, qui nous donnera la solution sous la forme

$$4\pi z(x_1, x_2, y) = \iint_{\Sigma_y} z\frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma\, d\eta + \iint_{S_0} G z\, d\xi_1\, d\xi_2 + \iiint_{V_y} G f\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\eta.$$

Si l'on avait appliqué la formule fondamentale à un point situé sur Σ ou extérieur, on aurait trouvé comme facteur dans le premier membre 2π ou o.

II. — Équations singulières.

Le calcul de la solution fondamentale, lorsque la ligne singulière est une *caractéristique*, Ox par exemple, présente peu de difficulté, même dans une région contenant cette ligne comme frontière ou à son intérieur. Nous nous occuperons seulement des équations $(\overline{\mathcal{E}})$ et, pour simplifier les calculs, nous supposerons ici que nous ayons ramené, par un changement d'inconnue, les équations à la forme

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p\frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0, \qquad \mathcal{F}_1(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^p\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

78. Calcul de la solution fondamentale. — Dans le calcul qui va suivre, nous supposerons le domaine donné quelconque si p est *pair*;

si p est *impair*, ce domaine sera situé tout entier d'*un même côté de* Oy et pourra admettre cette droite *comme frontière.*

Envisageons la fonction U du paragraphe **64**, et posons [A et B ayant les valeurs données par la formule (4) de la page 111]

$$(3) \qquad \overline{U}_0 = U, \qquad \overline{U}_1 = \iint_{S_{y,\eta}} c(s,t)\, U(\xi,\eta;s,t)\, \overline{U}_0(s,t;x,y)\, ds\, dt \ldots,$$

$$\overline{U}_n = \iint_{S_{y,\eta}} c(s,t)\, U(\xi,\eta;s,t)\, \overline{U}_{n-1}(s,t;xy)\, ds\, dt,$$

$S_{y,\eta}$ étant la région du domaine donné limitée par les caractéristiques d'ordonnée y et η. Tous ces termes tendent vers zéro avec $y-\eta$, si $x \neq \xi$. Étudions $\overline{U}_1$: il résulte de ce que nous avons vu dans le paragraphe **67**, qu'on peut écrire

$$|U| < (K)(y-\eta)^{-1+\frac{1}{q}} e^{-\frac{(|x|^r - |\xi|^r)^2}{q^2(y-\eta)}} \qquad (q = 2r = p+2);$$

si donc la région $S_{y,\eta}$ est finie, on voit que $\overline{U}_1$ est de l'ordre de $(y-\eta)^{-1+\frac{2}{q}}$ au plus. On peut donner une limitation plus précise. Désignons, en effet, par P', Π' les points symétriques de $P(x,y)$ et $\Pi(\xi,\eta)$ par rapport à Oy, au cas où ces points appartiennent au domaine d'intégration : supposons x et ξ positifs, c'est-à-dire, en somme, appelons P et Π ceux des quatre points qui sont à droite de Oy. Menons les parallèles à Oy équidistantes de P et Π, P' et Π' : avec Oy, elles partagent le domaine d'intégration en quatre régions. Soit R celle qui est le plus à droite et supposons qu'elle contienne $P(x,y)$: l'intégrale correspondante sera limitée par

$$(K) e^{-(L)\frac{(x^r-\xi^r)^2}{y-\eta}} \int_\eta^y \frac{dt}{[(y-t)(t-\eta)]^{1-\frac{1}{q}}} \int_{\frac{x+\xi}{2}}^{\infty} e^{-\frac{(s^r-x^r)^2}{q^2(y-t)}} ds.$$

Opérant comme pour l'intégrale J (p. 116), il nous suffira d'envisager la partie de R où l'on a $s \geqq x$ et d'y poser

$$s^r - x^r = q\sigma\sqrt{y-t} \qquad (\sigma \geqq 0)$$

et par suite

$$|ds\, dt| = 2\sqrt{y-t}\,(x^r + q\sigma\sqrt{y-t})^{\frac{1}{r}-1}\, |d\sigma\, dt| < (K)\frac{(y-t)^{\frac{1}{q}}}{\sigma^{1-\frac{2}{q}}}\, |d\sigma\, dt|.$$

L'intégrale correspondante admet donc comme limitation

$$(K)\,e^{-(L)\frac{(x^r-\xi^r)^s}{y-\eta}}\int_{\eta}^{y}\frac{dt}{(y-t)^{1-\frac{2}{q}}(t-\eta)^{1-\frac{1}{q}}}<(K)\frac{1}{(y-\eta)^{1-\frac{3}{q}}}\,e^{-(L)\frac{(x^r-\xi^r)^s}{y-\eta}},$$

et les autres intégrales se limitent de la même façon (ici le domaine d'intégration peut être une bande indéfinie, c restant fini).

Or ceci reste fini si $p=1$, ou si p est <1 et alors non entier; si $p>1$, la singularité pour $x=\xi$, $y=\eta$ est d'ordre moins élevé que dans le terme précédent et, en poursuivant la série d'approximations, on arrive à des termes *finis et continus* constituant une série *convergente* $\overline{U}$. Ici encore nous pouvons écrire $\overline{U}=U+V$, l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2}|V|\,d\xi$ *tendant vers zéro avec* $y-\eta$. D'où la *formule fondamentale* (¹)

$$z(x,y)=\int_{(C_y)}\left(\overline{U}\frac{\partial z}{\partial\xi}-z\frac{\partial\overline{U}}{\partial\xi}\right)d\eta+\xi^p\,\overline{U}\,z\,d\xi+\int\int_{S_y}\overline{U}\,f\,d\xi\,d\eta.$$

79. Application au problème du raccordement. — Étant données les deux équations $\mathcal{F}=0$ et $\mathcal{F}_1=0$, dans lesquelles nous supposons p impair, on peut se proposer de traiter pour une solution de l'équation $\mathcal{F}=0$ le problème du raccordement, traité dans le paragraphe **68** dans le cas où $c=0$. Nous allons indiquer brièvement comment on peut résoudre cette question.

Si l'on veut employer la première méthode indiquée au paragraphe **68**, nous effectuerons les approximations (3) du paragraphe **78** en partant de $\overline{U}_0=u_2$ [u_2 étant la fonction définie par la formule (6′), p. 120] et en remplaçant U par U_2, second terme de la solution fondamentale U. Nous obtiendrons ainsi une solution fondamentale particulière $\overline{u}_2(\xi,\eta;y)$, telle que $\frac{\partial\overline{u}_2}{\partial\xi}$ soit nulle pour $\xi=0$. Nous appliquerons alors la formule de Riemann à l'intégrale $\int\int\left[\overline{u}_2\mathcal{F}(z)-z\mathcal{F}_1(\overline{u}_2)\right]dS$ et au domaine ABNP (*fig.* 16), ce qui nous donnera une formule analogue à la formule (6), dans laquelle nous pourrons faire disparaître

(¹) Tout ceci s'applique aussi aux équations (1′) du paragraphe 63.

le terme en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, dans l'intégrale relative à BN, par l'emploi d'une fonction auxiliaire. Nous obtiendrons, en définitive, une équation intégrale en $\frac{\partial z}{\partial \xi}(0, \eta)$.

Si, au contraire, nous voulons employer la deuxième méthode, c'est-à-dire calculer $\frac{\partial z}{\partial y}(0, y)$, nous partirons, dans les approximations (3) du paragraphe **78**, de $\overline{U_0} = u_1$ [formule (7), p. 120] et nous remplacerons U par U_1, premier terme de U. Nous formerons ainsi la solution $\overline{u}_1$ de l'adjointe, nulle pour $\xi = 0$, et nous pourrons ensuite appliquer la formule de Riemann au domaine ABnp; mais alors il faudra porter son attention sur la transformation de l'intégrale en $z(0, \eta)$: l'élément différentiel sera encore ici de l'ordre de $\frac{1}{(y-\eta)^{1+\frac{1}{q}}}$. Après avoir éliminé le terme en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, sur BN, nous arriverons encore à une équation intégrale en $\frac{\partial z}{\partial \eta}(0, \eta)$, analogue à l'équation (11).

Pour démontrer que le noyau est fermé, nous utiliserons l'intégrale (étendue au domaine limité par C'BCB')

$$\int\int z_0\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0\right) dx\, dy$$
$$= \int\int\left[-\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 + c z_0^2\right] dx\, dy - \frac{1}{2}\int_{AC'+A'C} x^p z_0^2\, dx = 0,$$

z_0 étant une solution régulière de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^p \frac{\partial z}{\partial y} + c z = 0,$$

nulle sur ABC, A'B'C'. Mais ici, pour pouvoir tenir le même raisonnement que dans le paragraphe **68** et montrer que z_0 est identiquement nulle, nous sommes obligés de faire l'hypothèse que c est *négatif ou nul*. On peut cependant supposer c de signe quelconque, à condition que le contour n'ait pas une trop grande largeur, en utilisant le même artifice que dans le type elliptique (*voir* Picard, *Analyse*, 2e édition, t. II, p. 24). Le noyau sera fermé pour tout contour tel que la somme des valeurs maxima de PN et de PN' (*fig.* 16) soit inférieure à $\frac{\pi}{\sqrt{C}}$, C étant le maximum de $|c|$.

I. *Observations sur le Chapitre IV.* — Les problèmes traités dans les Sections I et III de ce Chapitre (formule fondamentale, problème du raccordement, problème de Cauchy) deviennent des problèmes relatifs à l'équation de la chaleur $\delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, quand l'exposant p a la valeur *zéro*, c'est-à-dire quand $q = 2$. Il est facile de vérifier que les formules générales se réduisent bien, pour $q = 2$, à celles qui figurent dans les Chapitres précédents.

Envisageons, par exemple, la solution fondamentale U de la page 109 : on constate aisément que $\sqrt{\pi}\left[\sqrt{\theta}\,\mathrm{I}_{\frac{1}{2}}(\theta) + \mathrm{I}_{-\frac{1}{2}}(\theta)\right] = e^{2\sqrt{\theta}}$, d'où il résulte que, si A et B ont les valeurs (4) [p. 111], U se réduit à $[4\pi(y-\eta)]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ et par suite la formule (5) devient la formule fondamentale (α) du paragraphe **1**.

De même, dans la solution (16) ou (16′) du problème de Cauchy [p. 135], faisons $q = 2$. En remarquant que φ_λ et $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x}$ s'annulent pour $x = \xi$, la formule (18) montre immédiatement par voie de récurrence que, pour $q = 2$, $\varphi_\lambda(x, \xi) = \frac{(x-\xi)^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$ et l'on retrouve ainsi la formule (12) (§ **55**).

II. *Observations sur le Chapitre V.* — Dans la formation de la solution fondamentale U, pour l'espace par exemple (p. 142), le terme U_n se décompose en une intégrale double et une intégrale triple. On peut également supposer que U_n *soit représenté par l'intégrale triple seule*, car la décomposition inverse montre que la solution $\mathrm{U} = \Sigma \mathrm{U}_n$ ainsi formée est bien solution de $\mathcal{F}_1(u) = 0$ (p. 141).

Indiquons ici également un procédé de limitation plus précis que celui que nous avons utilisé p. 139 et 143. Plaçons-nous dans le cas de l'espace et posons $\rho = \lambda r$, $t - \eta = \mu(y - \eta)$: on constate alors que

$$\frac{\rho^2}{4(t-\eta)} + \frac{(\rho - r)^2}{4(y-t)} = \frac{r^2}{4(y-\eta)}\left[1 + \frac{(\lambda-\mu)^2}{\mu(1-\mu)}\right] = \frac{r^2}{4(y-\eta)} + \nu^2.$$

En prenant comme variables d'intégration μ et ν dans la dernière intégrale de la page 142, on arrive aisément à la limitation (α, β, γ étant des nombres positifs)

$$|\mathrm{U}_1| < \sqrt{y-\eta}\,\mathrm{U}_0\left(\alpha + \frac{\beta r}{\sqrt{y-\eta}} + \frac{\gamma r^2}{y-\eta}\right)$$

et l'on opérerait de même pour U_2.

En appliquant cette méthode à l'équation $\delta u + cu = 0$, on constate que $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 e^{\mathrm{H}(\xi,\eta;x,y)(y-\eta)}$, avec $|\mathrm{H}| < \mathrm{C}$, C étant le maximum de $|c|$; si l'on remplace H par C, on obtient la solution fondamentale de $\delta u + \mathrm{C}u = 0$.

Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane;

PAR E. CARTAN.

J'ai indiqué dans un Mémoire précédent (¹) comment on pouvait former tous les groupes linéaires continus ne laissant invariante aucune multiplicité plane. Dans ces groupes linéaires les paramètres et les variables étaient supposés complexes. Dans ce qui suit, je m'occupe du cas où les paramètres sont réels, ainsi que les variables. Je suis amené d'abord à résoudre le même problème pour le cas intermédiaire où, les paramètres étant réels, les variables sont complexes. Chaque groupe $\mathcal{G}$ de cette dernière espèce à n variables complexes donne alors naissance, soit à un groupe réel G à n variables réelles, soit à un groupe réel G à $2n$ variables réelles; on est dans un cas ou dans l'autre suivant que le groupe $\mathcal{G}$ laisse ou non invariante une *antiinvolution* de première espèce.

J'indique comme application la composition des groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 8 variables (homogènes) au plus; je donne les indications permettant d'étendre ces résultats jusqu'à 12 variables, et il n'y aurait aucune difficulté à les étendre à un plus grand nombre de variables.

Les résultats obtenus peuvent avoir aussi leur application dans la question de la représentation des points imaginaires par des figures

---

(¹) *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, 1913, p. 53-96.

réelles ([1]). D'une manière plus précise, le problème que les résultats obtenus permettraient de résoudre est le suivant :

Étant donné, dans un espace à points complexes, un groupe projectif continu Γ, *ne laissant invariante aucune multiplicité plane complexe, représenter, dans un autre espace réel, les points complexes de l'espace donné par des figures réelles, de telle sorte que par cette représentation le groupe* Γ *devienne, dans le nouvel espace, un groupe projectif réel ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle.*

Ce problème admet une infinité de solutions. J'indique les plus simples dans le cas du groupe projectif général, du groupe quaternionien et des groupes hermitiens de l'espace complexe.

I.

Nous désignerons par la lettre $\mathcal{G}$ un groupe linéaire et homogène continu à variables complexes et à paramètres *réels;* ce groupe sera dit d'ordre (réel) r si ses transformations dépendent de r paramètres réels arbitraires. Nous désignerons par la lettre Γ un groupe linéaire et homogène continu à variables complexes et paramètres *complexes ;* ce groupe sera dit d'ordre (complexe) r si ses transformations dépendent de r paramètres complexes arbitraires.

La transformation infinitésimale la plus générale d'un groupe $\mathcal{G}$ d'ordre r est de la forme

$$(1) \qquad e_1 Z_1 f + e_2 Z_2 f + \ldots + e_r Z_r f,$$

où $e_1, e_2, \ldots, e_r$ sont des nombres réels arbitraires, et où $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ désignent r transformations infinitésimales qui ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients réels. Les coefficients de structure c_{iks} du groupe sont réels.

([1]) Citons pour orienter le lecteur dans les recherches récentes relatives à cette question, deux Mémoires déjà anciens de C. Segre, *Atti della R. Accad. Torino*, t. XXV, 1889-1890, p. 276, 430, 592, et *Math. Ann.*, t. XL, 1892, p. 413.

A ce groupe $\mathcal{G}$ on peut associer le groupe Γ dont la transformation infinitésimale la plus générale est définie par la formule (1), en convenant d'y attribuer à $e_1, e_2, \ldots, e_r$ des valeurs *complexes* arbitraires. Ce groupe Γ peut être d'ordre (complexe) r, mais il peut aussi être d'ordre inférieur à r. Ce dernier cas se présentera quand il existera entre $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ une ou plusieurs relations linéaires à coefficients imaginaires.

Comme les transformations $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ ne sont définies qu'à une substitution linéaire près à coefficients réels, on peut supposer que toutes les relations linéaires à coefficients imaginaires qui existent entre $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ se déduisent des relations

$$\left.\begin{aligned} &Z_{s+1} f + i Z_{s+2} f = 0, \\ &Z_{s+3} f + i Z_{s+4} f = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &Z_{r-1} f + i Z_r f \quad = 0. \end{aligned}\right\} \quad (r - s \text{ pair}).$$

Il est alors facile de voir que la transformation infinitésimale

$$e_{s+1} Z_{s+1} f + e_{s+2} Z_{s+2} f + \ldots + e_r Z_r f$$

engendre un sous-groupe invariant γ de $\mathcal{G}$. On a en effet

$$(Z_k Z_{s+1}) + i (Z_k Z_{s+2}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

ce qui montre que $(Z_k Z_{s+1})$ et $(Z_k Z_{s+2})$ sont des combinaisons linéaires de $Z_{s+1} f, \ldots, Z_r f$. Toutes les transformations de ce sous-groupe invariant appartiennent à la fois à $\mathcal{G}$ et à Γ.

II.

Si le groupe $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune multiplicité plane, il en est de même de Γ. Or on sait ([1]) que tout groupe linéaire, à paramètres et variables complexes, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, se décompose en un certain nombre de sous-groupes invariants simples, échangeables entre eux, un de ces sous-groupes invariants, mais un seul au plus, pouvant être le groupe à un paramètre (complexe)

([1]) E. Cartan, *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 147.

engendré par la transformation infinitésimale

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}.$$

En conservant les notations du paragraphe précédent, on voit que le groupe Γ, qui est engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1 f, \quad Z_2 f, \quad \ldots, \quad Z_s f; \quad Z_{s+1} f, \quad Z_{s+3} f, \quad \ldots, \quad Z_{r-1} f,$$

se décompose dans le sous-groupe invariant γ et un autre sous-groupe invariant Γ' qu'on peut supposer engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1 f, \quad Z_2 f, \quad \ldots, \quad Z_s f.$$

Par suite, le groupe $\mathcal{G}$ se décompose dans le sous-groupe invariant γ à paramètres *complexes* et le sous-groupe invariant $\mathcal{G}'$ à paramètres *réels* engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1 f, \quad Z_2 f, \quad \ldots, \quad Z_s f.$$

Le groupe γ peut lui-même se décomposer en sous-groupes simples.

Chaque sous-groupe invariant γ' de Γ' est défini par des équations linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Si ces équations peuvent être écrites de manière à avoir des coefficients réels, il correspond évidemment à γ' un sous-groupe g' de $\mathcal{G}'$ et l'on peut choisir les paramètres de γ' de manière que les transformations de g' s'obtiennent en donnant à ces paramètres des valeurs réelles arbitraires.

Si les équations linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_s$ qui définissent γ' ne peuvent pas être écrites de manière à avoir tous leurs coefficients réels, il existera évidemment un autre sous-groupe invariant $\overline{\gamma'}$ de Γ' défini par les équations complexes conjuguées. Ces deux sous-groupes γ' et $\overline{\gamma'}$ ont évidemment la même structure. On peut, par suite, choisir les paramètres de ces deux sous-groupes invariants de Γ' de manière que les transformations de $\mathcal{G}'$ s'obtiennent en donnant aux paramètres correspondants de ces deux sous-groupes des valeurs imaginaires conjuguées.

Il résulte de là que les sous-groupes invariants de Γ se partagent en trois catégories :

Les sous-groupes de la première catégorie sont définis par des trans-

formations infinitésimales, combinaisons linéaires de $Z_{s+1}, \ldots, Z_r f$.

Les sous-groupes de la seconde catégorie sont engendrés par des transformations infinitésimales indépendantes qui sont des combinaisons linéaires à coefficients *réels* de $Z_1 f, \ldots, Z_s f$.

Les sous-groupes de la troisième catégorie, conjugués deux à deux, sont engendrés par des transformations infinitésimales indépendantes qui sont des combinaisons linéaires à coefficients *imaginaires* de $Z_1 f, \ldots, Z_s f$.

On peut, de plus, choisir les paramètres de ces sous-groupes de manière que les transformations de $\mathcal{G}$ *s'obtiennent en donnant aux paramètres des sous-groupes de la première catégorie des valeurs* complexes *arbitraires, aux paramètres des sous-groupes de la seconde catégorie des valeurs* réelles *arbitraires, aux paramètres de deux sous-groupes conjugués de la troisième catégorie des valeurs* complexes conjuguées *arbitraires.*

D'ailleurs, les sous-groupes de l'une ou de deux des trois catégories peuvent manquer.

Les transformations infinitésimales indépendantes qui servent à définir chacun des sous-groupes invariants de Γ ont été définies, dans le cas de la première ou de la troisième catégorie, à une substitution linéaire près à coefficients complexes ; dans le cas de la seconde catégorie, à une substitution linéaire près à coefficients réels.

III.

On sait former tous les groupes Γ ne laissant invariante aucune multiplicité plane [1]. Si l'on connaît les structures des sous-groupes invariants de Γ, on construit pour chacune d'elles un groupe linéaire ne laissant invariante aucune multiplicité plane. Si alors on désigne respectivement par

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q, \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_r, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

[1] E. CARTAN, *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, 1913, p. 53.

les variables transformées par chacun de ces sous-groupes, les variables transformées par Γ peuvent être désignées symboliquement par

$$x_i y_j z_k \ldots \qquad (i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,q;\ k=1,2,\ldots,r;\ \ldots),$$

en ce sens qu'elles sont transformées par Γ de la même manière que les produits $x_i y_j z_k \ldots$ sont transformés linéairement entre eux quand on effectue respectivement sur les x, y, z, ... une transformation arbitraire de chacun des sous-groupes donnés.

Il résulte de là et de ce qui a été dit au paragraphe précédent, qu'on saura construire tous les groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane si l'on sait, pour chaque type donné de structure simple (complexe) d'ordre r, déterminer de la manière la plus générale possible r transformations infinitésimales indépendantes telles que les coefficients de structure correspondants soient *réels*. Une telle détermination définit en effet un groupe à r paramètres réels. Nous dirons que deux groupes à paramètres réels ont la même *forme* de structure si l'on peut rendre identiques leurs constantes de structure par une substitution linéaire à coefficients *réels* effectuée sur les transformations infinitésimales indépendantes de l'un des groupes.

A chaque *type* de structure complexe d'ordre r peuvent appartenir plusieurs *formes* de structures réelles d'ordre r. On connaît, en particulier, toutes les formes de structures réelles qui appartiennent aux différents types de structures simples (¹); nous y reviendrons plus loin.

Le problème de la détermination des groupes G qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane est ainsi ramené à deux problèmes déjà résolus : 1° celui de la détermination des groupes Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane; 2° celui de la détermination des formes de structures réelles appartenant aux différents types de structures complexes simples.

IV.

Occupons-nous maintenant des groupes linéaires réels, c'est-à-dire des groupes continus de substitutions linéaires à coefficients réels et à variables réelles. Nous désignerons un tel groupe par la lettre G.

(¹) J'ai effectué cette détermination dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École Normale*.

Si nous regardons les variables de G comme des quantités complexes, nous aurons un groupe $\mathcal{G}$. Si le groupe G ne laisse invariante aucune multiplicité plane (réelle), le groupe $\mathcal{G}$ peut aussi ne laisser invariante aucune multiplicité plane (complexe), mais il peut en laisser invariante au moins une.

Dans le premier cas, nous dirons que $\mathcal{G}$, ou tout groupe transformé de $\mathcal{G}$ par une substitution linéaire à coefficients complexes, est *associé* au groupe G. Le groupe G sera dit de *première classe*.

Dans le second cas, soit

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = 0 \tag{1}$$

les équations d'une multiplicité plane invariante par $\mathcal{G}$, les premiers membres $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ étant des combinaisons linéaires, à coefficients complexes, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de G. Il est bien évident que $\mathcal{G}$ laisse aussi invariante la multiplicité plane imaginaire conjuguée [1]

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \ldots = \bar{z}_\nu = 0. \tag{2}$$

Les 2ν équations (1) et (2) sont indépendantes; sinon, en effet, les équations qui se déduisent à la fois de (1) et de (2) représenteraient une multiplicité plane réelle qui serait évidemment invariante par G. De plus, $n = 2\nu$, sinon l'ensemble des équations (1) et (2) représenterait encore une multiplicité plane réelle qui serait invariante par G. Enfin, le groupe $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune multiplicité plane autre que (1) et (2), sinon on en déduirait l'existence d'une multiplicité plane réelle invariante par G.

Supposons que le groupe G soit engendré par les r transformations infinitésimales réelles indépendantes

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f.$$

En exprimant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen de $z_1, \ldots, z_\nu, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_\nu$, on aura évidemment

$$\begin{aligned} X_1 f &= Z_1 f + \bar{Z}_1 f, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r f &= Z_r f + \bar{Z}_r f, \end{aligned}$$

---

[1] Dans tout le cours de l'article, nous désignerons par $\bar{u}$ la quantité complexe conjuguée de u.

les $Z_\alpha f$ ne dépendant que des variables z, les $\overline{Z}_\alpha f$ ne dépendant que des variables $\overline{z}$ et ayant des coefficients conjugués de ceux des $Z_\alpha f$.

Les transformations infinitésimales $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ engendrent un groupe $\mathcal{G}'$ à paramètres réels et variables complexes; c'est celui qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme entre elles les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$. Il est d'ordre (réel) r, car si les transformations $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ étaient liées par une relation linéaire à coefficients réels, il en serait de même de $\overline{Z}_1 f, \ldots, \overline{Z}_r f$ et, par suite, aussi de $X_1 f, \ldots, X_r f$. Il ne laisse invariante aucune multiplicité plane; si, en effet, il en laissait une invariante, par exemple (ce qu'on peut toujours supposer)

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_h = 0 \qquad (h < \nu),$$

le groupe G laisserait invariante la multiplicité plane réelle

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_h = \overline{z}_1 = \overline{z}_2 = \ldots = \overline{z}_h = 0.$$

Le groupe $\mathcal{G}'$, ou tout groupe transformé de $\mathcal{G}'$ par une substitution linéaire à coefficients complexes, est dit *associé* de G. Le groupe G sera dit de *seconde classe*.

V.

Nous avons associé, dans le paragraphe précédent, à tout groupe linéaire réel G ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle, un groupe (que nous appellerons $\mathcal{G}$ dans les deux cas) à paramètres réels et variables complexes, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane complexe. Ce groupe $\mathcal{G}$ est défini à une substitution linéaire près, à coefficients complexes, effectuée sur les variables.

Si le groupe G appartient à la première classe, le nombre des variables de $\mathcal{G}$ est égal à celui des variables de G. Si le groupe G appartient à la seconde classe, le nombre des variables de $\mathcal{G}$ est la moitié de celui des variables de G.

Les groupes $\mathcal{G}$ ainsi associés aux groupes G jouissent de propriétés caractéristiques bien différentes suivant que G est de première ou de seconde classe.

1. Supposons d'abord le groupe G de première classe. Si l'on conserve d'abord pour $\mathcal{G}$ les variables de G (considérées dans $\mathcal{G}$ en tant

que complexes au lieu d'être considérées en G en tant que réelles), le groupe $\mathcal{G}$ changera deux systèmes (x) et (X) de valeurs des variables liées par les relations

$$(1) \qquad X_k = \bar{x}_k,$$

en deux systèmes de valeurs (x') et (X') liées par les mêmes relations. Ces relations rentrent dans des relations plus générales de la forme

$$(2) \qquad X_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho} \bar{x}_\rho,$$

qui définissent ce qu'on appelle une *antihomographie* (1). Cette antihomographie est une opération qui fait passer des quantités (x) aux quantités (X). Dans le cas particulier (1), cette antihomographie est dite une *antiinvolution* parce que, si on l'effectue deux fois de suite, on obtient l'opération identique.

Il est bien évident que si l'on effectue sur les variables de $\mathcal{G}$ une substitution linéaire à coefficients complexes, les équations de l'antiinvolution ne conserveront pas la forme simple (1), mais prendront la forme plus générale (2).

Nous pourrons, en nous plaçant au point de vue projectif, étendre un peu le sens du mot *antiinvolution* en donnant ce nom à toute antihomographie telle qu'effectuée deux fois de suite sur un point de coordonnées *homogènes* $(x_1, \ldots, x_n)$, elle redonne ce même point. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait les relations

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{a}_{\rho k} = h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{a}_{\rho j} = 0 \qquad (k \neq j;\ k, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où h désigne une constante réelle différente de zéro.

Remarquons que si un groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante l'antihomographie (2), il laisse aussi invariante toutes les antihomographies,

(1) *Voir* C. SEGRE, *Un nuovo campo di ricerche geometriche* (*Atti della R. Accad. Torino*, t. XXV, 1889-1890, p. 276, 430, 592).

identiques au point de vue projectif,

$$X_k = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho} \bar{x}_\rho,$$

où λ est un facteur constant complexe quelconque. Pour cette nouvelle antiinvolution, *que nous ne regarderons pas comme distincte de la première*, la constante h est multipliée par le facteur positif $\lambda\bar{\lambda}$. Le signe du nombre réel h définit donc une propriété intrinsèque de l'antiinvolution.

L'intiinvolution sera dite de *première espèce* si h est positif; de *deuxième espèce* si h est négatif. L'antiinvolution (1) est de première espèce. On peut encore dire qu'une antiinvolution de première espèce admet des éléments doubles, tandis qu'une antiinvolution de seconde espèce n'en admet pas. Les éléments doubles sont donnés par les équations

$$(3) \qquad x_k = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho} \bar{x}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où λ est un nombre complexe quelconque admettant pour module $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Les éléments doubles sont, au point de vue projectif, indépendants du choix de ce nombre complexe, en ce sens que deux systèmes (3) correspondant à deux valeurs différentes de λ se déduisent l'un de l'autre en multipliant toutes les variables x_k par un même facteur (et les $\bar{x}_k$ par le facteur conjugué).

Les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments doubles définis par les équations (3) peuvent s'exprimer linéairement au moyen de n paramètres réels arbitraires $u_1, \ldots, u_n$. Si l'on substitue aux variables $x_1, \ldots, x_n$ les variables $u_1, \ldots, u_n$ ainsi définies, il est évident que le système (3) prend la forme

$$u_k = \bar{u}_k,$$

et, par suite, l'antiinvolution considérée de première espèce peut toujours être réduite à la forme canonique

$$(4) \qquad U_k = \bar{u}_k.$$

Si le groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante l'antiinvolution considérée, il deviendra, avec les nouvelles variables u_k, un groupe linéaire à coefficients *réels*, car la transformation infinitésimale

$$\Sigma \alpha_{k\rho} u_k \frac{\partial f}{\partial u_\rho}$$

ne laisse invariante l'antiinvolution (4) que si tous les coefficients $\alpha_{k\rho}$ sont réels. Le groupe réel G défini par les mêmes transformations infinitésimales peut donc être regardé comme le groupe qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme les éléments doubles de l'antiinvolution de première espèce. Bien que ces éléments doubles puissent être définis d'une infinité de manières différentes, l'argument du coefficient λ des équations (3) étant arbitraire, on obtient néanmoins toujours le même groupe G ou, du moins, un groupe qui lui est semblable par une substitution linéaire réelle ([1]).

Il résulte de ce qui précède que, *pour qu'un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane puisse être regardé comme associé à un groupe* G *de première classe, il faut que $\mathcal{G}$ laisse invariante une antiinvolution de première espèce; le groupe* G *indique alors comment $\mathcal{G}$ transforme les éléments doubles de cette involution.*

2. Supposons maintenant le groupe G de seconde classe. Dans ce cas, le groupe associé $\mathcal{G}$ ne peut laisser invariante aucune antiinvolution de première espèce. Sinon, en effet, on pourrait faire un changement linéaire de variables de manière à réduire cette antiinvolution à la forme

$$Z_k = \bar{z}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et le groupe G laisserait invariante la multiplicité plane *réelle*

$$z_k = \bar{z}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Donc, *si un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité*

([1]) Cela tient à ce que les transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$ ne changent pas quand on y remplace les variables x_k par ρx_k, ρ étant un facteur constant.

plane (complexe) est associé à un groupe réel G *ne laissant invariante aucune multiplicité plane (réelle), ce groupe* G *est de première classe si* $\mathcal{G}$ *laisse invariante une antiinvolution de première espèce, de seconde classe dans le cas contraire.*

VI.

Il nous reste à démontrer que *tout groupe* $\mathcal{G}$ *qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane est associé à un groupe réel* G, *et à un seul.*

1. Dans le cas où $\mathcal{G}$ laisse invariante une antiinvolution de première espèce, il résulte des considérations du paragraphe précédent que, en réduisant l'antiinvolution à sa forme canonique, les coefficients des équations du groupe G deviennent tous réels, ce qui donne, en regardant les variables comme réelles, un groupe réel G. Ce groupe G ne laisse évidemment invariante aucune multiplicité plane, réelle ou imaginaire, de sorte que $\mathcal{G}$ est le groupe qui lui est associé.

Pour démontrer qu'il n'y a qu'un groupe réel G auquel $\mathcal{G}$ soit associé, il suffit de démontrer que $\mathcal{G}$ ne laisse invariante qu'une antiinvolution. En effet, si $\mathcal{G}$ laissait invariantes les deux antiinvolutions (ou même les deux antihomographies)

$$(1)\qquad Z_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{z}_\rho$$

$$(2)\qquad Z_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} b_{k\rho}\bar{z}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $b_{k\rho}$ ne sont pas supposés proportionnels aux $a_{k\rho}$, le groupe $\mathcal{G}$ laisserait invariante la multiplicité plane (si elle existe)

$$(3)\qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \bar{a}_{k\rho} z_\rho = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \bar{b}_{k\rho} z_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où λ désigne un facteur constant arbitraire. Il est évidemment possible de choisir ce facteur de manière que les équations (3) se réduisent à moins de n (sans être identiques). Le groupe $\mathcal{G}$ laisserait

donc invariante une multiplicité plane, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Dans le cas où $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune antiinvolution de première espèce, les considérations du paragraphe IV montrent que le groupe G auquel il est associé (si le groupe G existe) est simplement celui qui indique comment les transformations de $\mathcal{G}$ échangent entre elles les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes de $\mathcal{G}$. Ce groupe G est donc bien déterminé. *Réciproquement*, étant donné un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune antiinvolution de première espèce, le groupe G, qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme les parties réelles et les coefficients de i des variables de $\mathcal{G}$, ne peut laisser invariante aucune multiplicité plane réelle. Toute multiplicité plane réelle invariante peut, en effet, se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum a_{1k} z_k = \sum \bar{a}_{1k} \bar{z}_k, \\ \sum a_{2k} z_k = \sum \bar{a}_{2k} \bar{z}_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum a_{\rho k} z_k = \sum \bar{a}_{\rho k} \bar{z}_k. \end{cases}$$

Le groupe $\mathcal{G}$ laisserait évidemment invariante la multiplicité plane obtenue en annulant les premiers membres de ces équations; il faut donc qu'en appelant ν le nombre des variables z, ces premiers membres contiennent ν formes indépendantes ($\rho \geqq \nu$). On ne peut pas avoir $\rho = \nu$, car alors le groupe $\mathcal{G}$ laisserait invariante l'antiinvolution de première espèce

$$\sum a_{jk} Z_k = \sum \bar{a}_{jk} \bar{z}_k \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Enfin, on ne peut pas avoir non plus $\rho > \nu$, car alors on pourrait déduire des équations (4) des équations ne contenant que les z_k sans contenir les $\bar{z}_k$, et ces équations définiraient une multiplicité plane complexe évidemment invariante par le groupe $\mathcal{G}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le groupe G ne laisse donc invariante aucune multiplicité plane réelle, et il est alors évident que le groupe $\mathcal{G}$ est bien le groupe qui lui est associé.

VII.

L'analyse précédente montre que la détermination des groupes réels G qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane réelle revient à la détermination des groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane complexe. Il y a une correspondance univoque entre les uns et les autres, les groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce correspondant aux groupes G de première classe, les groupes $\mathcal{G}$ qui n'en laissent aucune invariante correspondant aux groupes G de seconde classe. Nous dirons, pour abréger, que, dans le premier cas, le groupe $\mathcal{G}$ est de première classe et que, dans le second cas, il est de seconde classe.

La détermination des groupes $\mathcal{G}$ ayant été faite précédemment, il nous reste à reconnaître ceux d'entre eux qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce.

Remarquons d'abord que, pour qu'il en soit ainsi, *il faut que $\mathcal{G}$ ne contienne aucun sous-groupe invariant simple de la première catégorie* (II). L'existence d'un de ces sous-groupes entraînerait en effet l'existence, pour $\mathcal{G}$, de deux transformations infinitésimales de la forme

$$\sum \alpha_{jk} z_j \frac{\partial f}{\partial z_k} \quad \text{et} \quad \sum i\alpha_{jk} z_j \frac{\partial f}{\partial z_k}.$$

Si donc le groupe $\mathcal{G}$ laissait invariante l'antihomographie

$$(1) \qquad Z_k = \sum a_{k\rho} \bar{z}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

il en résulterait que chacune des équations

$$\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jk} Z_j = \sum_{\rho, \sigma} \bar{\alpha}_{\rho\sigma} a_{k\sigma} \bar{z}_\rho,$$

$$\sum_j i\alpha_{jk} Z_j = \sum_{\rho, \sigma} - i\bar{\alpha}_{\rho\sigma} a_{k\sigma} \bar{z}_\rho$$

serait une conséquence des équations (1), ce qui est impossible.

De même, $\mathcal{G}$ ne peut laisser invariante aucune antihomographie s'il

contient la transformation infinitésimale

$$h\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$

h n'étant pas réel; l'équation

$$hZ_k = \bar{h} \Sigma a_{k\rho} \bar{z}_\rho$$

ne pourrait pas en effet être une conséquence des équations (1). Par suite, *le groupe* Γ *associé à* $\mathcal{G}$ *ne peut admettre de sous-groupe invariant simple à un paramètre que dans la seconde catégorie, et alors ce sous-groupe est engendré par la transformation*

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}.$$

VIII.

Les seuls groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution sont, d'après cela, engendrés par des sous-groupes invariants simples de la seconde et de la troisième catégorie.

Considérons de nouveau le groupe Γ à paramètres complexes qui est engendré par les mêmes transformations infinitésimales que $\mathcal{G}$: l'ordre complexe de Γ est égal à l'ordre réel de $\mathcal{G}$. Si $Z_1 f$, ..., $Z_r f$ constituent un système de transformations infinitésimales indépendantes de $\mathcal{G}$, la transformation infinitésimale la plus générale de Γ est

$$e_1 Z_1 f + e_2 Z_2 f + \ldots + e_r Z_r f,$$

où e_1, e_2, ..., e_α sont des nombres complexes arbitraires. On sait que, si l'on part d'une transformation infinitésimale *arbitraire* Zf de Γ et si l'on calcule les racines de l'équation caractéristique correspondante, on peut choisir les variables de Γ de manière que chacune d'elles ait un *poids* déterminé, ce poids étant une combinaison linéaire *à coefficients entiers ou fractionnaires* des racines de l'équation caractéristique. *On peut toujours supposer que* Zf *appartient*

à $\mathcal{G}$ [1]. S'il en est ainsi, *l'antiinvolution que le groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante doit faire correspondre à une variable d'un poids donné ϖ une combinaison linéaire des variables dont le poids est complexe conjugué de* ϖ; il y aura donc en particulier autant de variables du poids ϖ que du poids conjugué $\overline{\varpi}$.

Nous avons déjà vu (III) que les variables de $\mathcal{G}$ peuvent s'écrire symboliquement

$$x_i y_j z_k \ldots,$$

les variables auxiliaires x étant transformées par le premier sous-groupe invariant simple de Γ, les variables y par le second et ainsi de suite. On peut aussi choisir ces variables de manière que chacune ait un poids déterminé, le poids de la variable $x_i y_j z_k \ldots$ étant la somme des poids des variables x_i, y_j, z_k.

De plus, la transformation Zf peut toujours d'une manière, et d'une seule, être regardée comme la somme de transformations appartenant respectivement aux différents sous-groupes invariants; à chacune des parties de cette somme correspond une équation caractéristique relative au sous-groupe invariant correspondant et les poids des variables auxiliaires correspondantes sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers ou fractionnaires des racines de cette équation caractéristique.

D'après cela, si le groupe Γ admet deux sous-groupes invariants conjugués γ et $\overline{\gamma}$ de la troisième catégorie, les deux équations caractéristiques correspondantes n'admettront que des racines imaginaires, et les racines de la seconde seront conjuguées de celles de la première. Aux poids, *imaginaires*, des variables auxiliaires attachées au premier sous-groupe devront correspondre, *si le groupe $\mathcal{G}$ laisse une antiinvolution invariante*, des poids imaginaires conjugués qui seront nécessairement les poids des variables auxiliaires attachées au second sous-groupe. Il faut donc que les poids des variables auxiliaires de $\overline{\gamma}$ se déduisent linéairement des racines de l'équation caractéristique de $\overline{\gamma}$

(1) En effet, dire que la transformation Zf est arbitraire, c'est dire que les coefficients $e_1, \ldots, e_r$ sont assujettis à ne pas satisfaire à certaines équations algébriques; il est donc possible d'attribuer à ces coefficients des valeurs *réelles*.

exactement comme les poids des variables auxiliaires de γ se déduisent linéairement des racines de l'équation caractéristique de γ : autrement dit *il faut que les deux groupes γ et $\overline{\gamma}$ qui entrent comme facteurs dans le groupe linéaire Γ (regardé comme produit) soient semblables* (¹).

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi. On peut toujours choisir les transformations infinitésimales indépendantes du groupe simple γ, de manière que les coefficients de structure soient réels ; on pourra alors déduire les transformations infinitésimales de $\overline{\gamma}$ de celles de γ en remplaçant les variables x_k de γ par des variables y_k et en remplaçant les coefficients par leurs conjugués. Le *produit* des deux groupes linéaires ainsi formés, c'est-à-dire le groupe qui indique comment sont transformés les produits $x_j y_k$ quand on effectue sur les x et sur les y des transformations *à paramètres conjugués*, admet alors évidemment l'antiinvolution de première espèce représentée symboliquement par les équations

$$X_j Y_k = \overline{x_k y_j}.$$

En résumé, *si le groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante une antiinvolution de première espèce et si le groupe Γ qui lui est associé comprend, regardé comme produit de groupes linéaires simples, deux groupes conjugués de la troisième catégorie, il faut que ces deux groupes simples soient semblables. Celles des transformations de leur produit qui font partie de $\mathcal{G}$ forment alors dans ce cas un groupe qui entre comme facteur dans $\mathcal{G}$, et qui admet une antiinvolution de première espèce.*

IX.

Considérons maintenant un sous-groupe invariant simple de $\mathcal{G}$ qui soit de la deuxième catégorie. Deux cas peuvent ici se présenter. Ou bien l'équation caractéristique de ce sous-groupe est à coefficients réels, ou bien certains de ces coefficients sont imaginaires.

Dans le second cas, l'équation à coefficients conjugués est néces-

(¹) Deux groupes linéaires isomorphes qui ont le même système de poids sont en effet semblables (voir *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, p. 59).

sairement l'équation caractéristique d'un autre sous-groupe invariant simple de $\mathcal{G}$. Les deux groupes linéaires simples correspondants qui entrent comme facteur dans $\mathcal{G}$ seront dits *corrélatifs*. Les racines de l'équation caractéristique de chacun de ces groupes sont toutes imaginaires, sans quoi l'équation caractéristique de Γ aurait des racines doubles, ce qui est impossible. On peut alors faire sur ces deux groupes corrélatifs le même raisonnement que celui qui vient d'être fait sur les groupes conjugués. Ces deux groupes linéaires corrélatifs doivent être semblables. Réciproquement, si l'on prend deux groupes linéaires simples semblables, à paramètres réels et variables complexes (appartenant nécessairement à la même *forme* de structure), leur produit admet une antiinvolution de première espèce.

Reste à considérer le premier cas où l'équation caractéristique d'un sous-groupe simple de $\mathcal{G}$ (appartenant à la deuxième catégorie) a tous ses coefficients réels. *Il se trouve que tout groupe linéaire à paramètres réels et variables complexes, appartenant à cette forme de structure, laisse invariante une antiinvolution, soit de première, soit de seconde espèce.* Nous reviendrons plus loin sur cette propriété importante.

Si nous l'admettons, nous arrivons à la conclusion suivante :

Pour qu'un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane soit associé à un groupe G de première classe, il faut que, si l'on considère les groupes simples qui entrent dans la composition de $\mathcal{G}$, deux groupes conjugués quelconques de la troisième catégorie soient semblables, ainsi que deux groupes corrélatifs quelconques de la seconde catégorie. S'il en est ainsi, le groupe $\mathcal{G}$ peut être regardé comme un produit de groupes linéaires dont chacun laisse une certaine antiinvolution invariante; cette antiinvolution ne peut être de seconde espèce que si le groupe facteur est un groupe simple de la seconde catégorie qui soit son propre corrélatif.

X.

Pour terminer ces généralités, remarquons que le groupe produit de deux groupes linéaires admettant chacun une antiinvolution admet

aussi une antiinvolution. Si en effet

$$X_k = \Sigma a_{k\rho}\bar{x}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$Y_k = \Sigma b_{k\rho}\bar{y}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les équations des deux antiinvolutions, le groupe produit admet l'antiinvolution

$$X_j Y_k = \Sigma a_{j\rho} b_{k\sigma} \overline{x_\rho y_\sigma},$$

et l'on vérifie facilement que le nombre caractéristique h (V) de la troisième antiinvolution est le produit des nombres caractéristiques des deux premières. Par suite, la troisième antiinvolution est de première espèce si les deux premières sont de même espèce, de seconde espèce si les deux premières sont d'espèces différentes.

Convenons d'après cela d'appeler *indice* d'un groupe linéaire simple qui soit son propre corrélatif le nombre $+1$ si l'antiinvolution que ce groupe laisse invariante est de première espèce, le nombre -1 si cette antiinvolution est de seconde espèce. On arrive alors à la conclusion définitive suivante :

Pour qu'un groupe linéaire $\mathcal{G}$, *qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, soit associé à un groupe réel* G *de première classe, il faut et il suffit :*

1° *Qu'aucun groupe simple de première catégorie n'entre dans la composition de* $\mathcal{G}$;

2° *Que les groupes simples conjugués et les groupes corrélatifs qui entrent dans cette composition soient semblables;*

3° *Que le produit des indices des groupes simples, qui sont leurs propres corrélatifs, soit égal à* $+1$;

4° *Que le seul groupe simple à un paramètre qui puisse entrer dans la composition de* $\mathcal{G}$ *soit engendré par la transformation infinitésimale* $u\frac{\partial f}{\partial u}$.

XI.

On sait que tout groupe linéaire simple Γ, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, peut être obtenu par la multiplication de *groupes fondamentaux;* ces groupes sont en nombre l (rang du

groupe Γ) et chacun d'eux peut entrer dans la composition de Γ avec un exposant entier, positif ou nul, quelconque.

A chaque *forme* de structure appartenant au type de structure de Γ correspondent également l groupes linéaires $\mathcal{G}$ fondamentaux. Si l'un de ces groupes fondamentaux n'est pas son propre corrélatif, son corrélatif est encore un groupe fondamental : c'est une propriété que nous admettrons pour l'instant.

Par suite, *si un groupe linéaire $\mathcal{G}$ est associé à un groupe réel de première classe, les groupes fondamentaux corrélatifs qui entrent dans sa composition doivent figurer avec les mêmes exposants; de plus, la somme des exposants de ceux des groupes fondamentaux autocorrélatifs d'indice* -1 *qui entrent dans la composition de $\mathcal{G}$ doit être paire.*

Nous allons maintenant passer en revue les diverses formes de structures simples et les groupes fondamentaux correspondants; on verra que les propriétés annoncées de ces groupes sont vérifiées, à savoir que tout groupe fondamental autocorrélatif admet une anti-involution, et qu'à tout groupe fondamental non autocorrélatif correspond un groupe fondamental qui est son corrélatif.

XII.

Groupes du type (A). — Les groupes fondamentaux, à paramètres et variables complexes, du type (A) sont (¹) :

Le groupe linéaire et homogène spécial γ_1 à n variables (groupe projectif de l'espace E_{n-1});

Et les groupes linéaires et homogènes $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{n-1}$ qui indiquent comment le groupe précédent transforme les droites, les plans, etc., de l'espace à $n-1$ dimensions.

Ces groupes sont à n^2-1 paramètres *complexes*.

Nous avons à considérer les groupes dépendant de n^2-1 paramètres *réels* qui se déduisent des précédents.

Ces groupes s'obtiennent :

1° En prenant les transformations à coefficients réels (groupe projectif de l'espace *réel* E_{n-1});

(¹) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 85.

2° Dans le cas de n pair, en prenant les transformations linéaires complexes qui laissent invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_{2i-1} = \bar{x}_{2i}, \qquad X_{2i} = -\bar{x}_{2i-1} \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

$\left(\text{groupe projectif quaternionien de l'espace } E_{\frac{n}{2}-1}\right)$. Nous désignerons les groupes fondamentaux correspondants par la notation $g^{(q)}$;

3° En prenant les transformations linéaires complexes qui laissent invariante une forme d'Hermite

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n \bar{x}_n \qquad (\varepsilon_i = \pm 1),$$

(groupes projectifs hermitiens de l'espace E_{n-1}). Nous désignerons les groupes fondamentaux correspondants par la notation $g^{(h)}$.

Dans le premier cas, le groupe g_1 laisse invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_i = \bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les autres groupes fondamentaux $g_2, \ldots, g_{n-2}$ laissent aussi invariante une antiinvolution de première espèce; tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs et d'indice 1.

Dans le second cas, le groupe $g_\alpha^{(q)}$ est évidemment autocorrélatif et d'indice $(-1)^\alpha$.

Dans le troisième cas, le groupe $g_\alpha^{(h)}$ est corrélatif du groupe $g_{n-\alpha}^{(h)}$; il n'y a de groupe fondamental autocorrélatif que le groupe $g_{\frac{n}{2}}^{(h)}$, si n est pair. Le groupe $g_1^{(h)}$ laisse en effet invariante l'*anticorrélation*

$$(1) \qquad X_i = \varepsilon_i \bar{u}_i,$$

qui fait correspondre au plan (u_i) le point (X_i). Convenons d'identifier les deux variables dualistiques

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n) u_{i_{k+1} \ldots i_n} \quad [1],$$

qui sont les coordonnées d'une même multiplicité plane définie soit par $k-1$ points, soit par $n-k-1$ plans (à $n-1$ dimensions). L'anticorrélation donne alors

$$(2) \quad X_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \ldots \varepsilon_{i_k} \bar{u}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \ldots \varepsilon_{i_k} (i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_n i_1 \ldots i_k) \bar{x}_{i_{k+1} \ldots i_n}.$$

[1] Nous désignons par $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ le nombre ± 1 suivant que la permutation des indices $1, 2, \ldots, n$ est paire ou impaire.

Supposons alors $n = 2k$: les variables $x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sont les variables transformées par le groupe $g_k^{(h)}$ et ce groupe laisse invariante l'antiinvolution définie par les équations (2). Comme on a

$$X_{i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_n} = \varepsilon_{i_{k+1}} \varepsilon_{i_{k+2}} \ldots \varepsilon_{i_n} (i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n) \overline{x}_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

on voit que l'indice de cette antiinvolution est

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n (-1)^k.$$

Donc, *dans le troisième cas*, on a, si n est pair, un groupe $g_{\frac{n}{2}}^{(h)}$ autocorrélatif dont l'indice est

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n.$$

Si $n = 2$, le groupe $g^{(h)}$ se confond avec le groupe $g^{(q)}$: il est autocorrélatif d'indice -1

XIII.

Groupes du type (C). — Le groupe fondamental γ_1 à paramètres et variables complexes, est celui qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée [1]

$$[x_1 x_{-1}] + [x_2 x_{-2}] + \ldots + [x_l x_{-l}] \qquad (l \geqq 2).$$

Le groupe γ_α ($\alpha = 2, 3, \ldots, l$) est celui qui indique comment γ_1 transforme entre elles la forme alternée $[x_1 x_2 \ldots x_\alpha]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de γ_1. Ces groupes sont à $l(2l+1)$ paramètres complexes.

Les groupes à $l(2l+1)$ paramètres réels, qui se déduisent de γ_1, sont :

Dans le premier cas, le groupe g_1 formé des transformations de γ_1 dont les coefficients sont réels. Il laisse invariante une antiinvolution de première espèce, ainsi que tous les groupes g_α correspondants. Tous ces groupes ont pour indice 1.

Dans le second cas, le groupe $g_1^{(h)}$ formé des transformations complexes qui laissent invariante la forme d'Hermite

$$\varepsilon_1(x_1 \overline{x}_1 + x_{-1} \overline{x}_{-1}) + \varepsilon_2(x_2 \overline{x}_2 + x_{-2} \overline{x}_{-2}) + \ldots + \varepsilon_l(x_l \overline{x}_l + x_{-l} \overline{x}_{-l});$$

---

[1] *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 89.

elles laissent aussi invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_i = \varepsilon_i \bar{x}_{-i}, \qquad X_{-i} = -\varepsilon_i \bar{x}_i;$$

l'indice du groupe $g_\alpha^{(h)}$ est alors égal à $(-1)^\alpha$.

XIV.

Groupes du type (B). — Le groupe fondamental γ_2, à paramètres et variables complexes, est ici celui qui laisse invariante la forme quadratique ([1])

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l} \qquad (l \geqq 2).$$

Il est à $l(2l+1)$ paramètres. Les groupes fondamentaux $\gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_l$ indiquent comment γ_2 transforme certaines formes alternées de degrés $2, 3, \ldots, l-1$ formées au moyen des variables x. Quant au groupe γ_1 il est à 2^l variables et indique comment γ_2 transforme entre elles les mutiplicités planes

$$x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} x_0 + \varepsilon_1 x_{-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} x_{\varepsilon_1} + \ldots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, -\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l} x_{\varepsilon_k} + \ldots = 0.$$
$$(\varepsilon_i = \pm 1).$$

Pour chaque forme de structure appartenant au type (B), le groupe g_2, à $l(2l+1)$ paramètres réels, est formé de transformations de γ_2 qui laissent invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_0 = \bar{x}_0, \quad X_i = \bar{x}_{-i}, \quad X_\alpha = \bar{x}_\alpha \quad (i = \pm 1, \ldots, \pm h;\ \alpha = \pm h+1, \ldots, \pm l),$$

l'entier h pouvant être nul. Ce groupe g_2 est en somme le groupe projectif réel d'une forme quadratique à $l+h+1$ carrés positifs et $l-h$ carrés négatifs. Chacun des groupes $g_2, g_3, \ldots, g_l$ laisse alors invariante une antiinvolution de première espèce

Quant au groupe g_1, il laisse invariante l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} = \varepsilon_{h-1} \varepsilon_{h-3} \varepsilon_{h-5} \ldots \bar{x}_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_h, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l},$$

où le produit $\varepsilon_{h-1} \varepsilon_{h-3} \ldots$ se termine soit par ε_1 si h est pair, soit par $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l$, si h est impair. On trouve alors facilement que l'indice de g_1 est $(-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}$.

On peut encore dire que si la forme quadratique invariante est de

---

([1]) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 86.

caractère δ (c'est-à-dire si la différence entre le nombre de ses carrés positifs et celui de ses carrés négatifs est δ), l'indice du groupe g_1 est

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

XV.

Groupes du type (D). — Le groupe fondamental γ_3, à paramètres et variables complexes, est ici celui qui laisse invariante la forme quadratique (¹)

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l} \qquad (l \geq 4).$$

Il est à $l(2l-1)$ paramètres complexes.

Les groupes fondamentaux $\gamma_4, \gamma_5, \ldots \gamma_l$ indiquent comment γ_3 transforme certaines formes alternées de degrés $2, 3, \ldots, l-2$, formées au moyen des variables x. Le groupe γ_1 est à 2^{l-1} variables

$$x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1, \ \Pi \varepsilon_i = -1),$$

et indique comment γ_3 transforme certaines multiplicités planes de l'espace E_{2l-1} dans lequel opère γ_3. Le groupe γ_2 est aussi à 2^{l-1} variables

$$y_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1, \ \Pi \varepsilon_i = +1),$$

et se définit d'une manière analogue.

A chaque forme de structure appartenant au type (D) correspond un groupe g_3, à $l(2l-1)$ paramètres *réels*. Il est formé :

Dans le premier cas, des transformations de γ_3 qui laissent invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_i = \bar{x}_{-i}, \qquad X_\alpha = \bar{x}_\alpha \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm h;\ \alpha = \pm h+1, \ldots, \pm l),$$

l'entier h pouvant être nul. Ce groupe g_3 est en somme le groupe projectif réel d'une forme quadratique à $l+h$ carrés positifs et $l-h$ carrés négatifs. Chacun des groupes $g_3, g_4, \ldots, g_l$ laisse alors invariante une antiinvolution de première espèce. Quant au groupe g_1,

---

(¹) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 91.

il est corrélatif de g_2 si h est impair; si, au contraire, h est pair, il est autocorrélatif et admet l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{h-1} \bar{x}_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l}.$$

L'indice est $(-1)^{\frac{h}{2}} = (-1)^{\frac{\delta}{4}}$, en désignant par δ le caractère de la forme quadratique invariante. Il en est de même du groupe g_2.

Donc, dans le premier cas, les groupes $g_3, \ldots, g_l$ sont autoconjugués et d'indice 1; *les groupes g_1 et g_2 sont corrélatifs l'un de l'autre si $\delta \equiv 2$* (mod. 4); *ils sont autocorrélatifs et d'indice $(-1)^{\frac{\delta}{4}}$ si $\delta \equiv 0$* (mod. 4).

Dans le deuxième cas, le groupe g_3, que nous désignerons par $g_3^{(h)}$, est formé des transformations complexes de γ_3 qui laissent invariante la forme quadratique

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l},$$

et la forme d'Hermite

$$x_1 \bar{x}_1 - x_{-1} \bar{x}_{-1} + \ldots + x_l \bar{x}_l - x_{-l} \bar{x}_{-l}.$$

Elles laissent aussi invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_i = \bar{x}_{-i}, \qquad X_{-i} = -\bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Il résulte de là que le groupe $g_\alpha^{(h)}$ est autocorrélatif d'indice $(-1)^\alpha$.

Quant aux deux groupes $g_1^{(h)}$ et $g_2^{(h)}$, ils sont corrélatifs l'un de l'autre si l est impair. Dans le cas contraire, ils sont autocorrélatifs; le groupe $g_1^{(h)}$ admet l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} = i^{\Sigma} (-1)^{\alpha \frac{1-\varepsilon_\alpha}{2}} x_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_l},$$

et cette antiinvolution est de première espèce. Il en est de même pour le groupe g_2, qui admet donc, ainsi que g_1, l'indice 1.

XVI.

Contentons-nous d'indiquer les résultats dans le cas des types (E), (F) et (G).

Dans le cas du type (E), $l = 6$, les formes de structures réelles se répartissent en deux catégories :

Dans la première catégorie (structures de caractères 6, 2, — 22), chaque groupe fondamental est autocorrélatif et d'indice 1;

Dans la seconde catégorie (structures de caractères 2, — 14, — 78), les groupes g_1 et g_3 sont corrélatifs l'un de l'autre; il en est de même des groupes g_4 et g_5. Les groupes g_2 et g_6 sont autocorrélatifs et d'indice 1.

Dans le cas du type (E), $l = 7$, les formes de structures réelles se répartissent aussi en deux catégories :

Dans la première catégorie (structures de caractères 7 et — 25), tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs et d'indice 1;

Dans la seconde catégorie (structures de caractères — 5 et — 133), tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs. Les indices des groupes g_1, g_4, g_5, g_7 sont égaux à 1 : ceux des groupes g_2, g_3, g_6 à — 1.

Dans le cas du type (E), $l = 8$, tous les groupes fondamentaux sont toujours autocorrélatifs et d'indice 1.

Il en est de même *dans le cas des types* (F) *et* (G).

XVII.

Nous allons, comme application, indiquer tous les groupes linéaires simples Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 12 variables au plus, ce qui permettrait d'indiquer la formation de tous les groupes réels G, de première ou de deuxième classe, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 12 variables au plus.

Type (A) ($l = 1$) :

γ^p à $p + 1$ variables ($p \leq 11$)

Type (A) ($l = 2$) :

γ_1 et γ_2	à	3 variables
γ_1^2 et γ_2^2		6 »
$\gamma_1\gamma_2$		8 »
γ_1^3 et γ_2^3		10 »

Type (A) ($l = 3$) :

γ_1 et γ_3	à	4 variables
γ_2		6 »
γ_1^2 et γ_3^2		10 »

Type (A) ($l=4$) :

γ_1 et γ_4 à 5 variables
γ_2 et γ_3 10 »

Type (A) ($l=5, 6, 7, 8, 9$ 10, 11) :

γ_1 et γ_l à $l+1$ variables

Type (C) ($l=2$) :

γ_1 à 4 variables
γ_2 5 »
γ_1^2 10 »

Type (C) ($l=3, 4, 5, 6$) :

γ_1 à $2l$ variables

Type (B) ($l=3$) :

γ_2 à 7 variables
γ_1 8 »

Type (B) ($l=4, 5$) :

γ_2 à $2l+1$ variables

Type (D) ($l=4, 5, 6$) :

γ_3 à $2l$ variables

Type (G) ($l=2$) :

γ_1 à 7 variables

XVIII.

Nous allons maintenant indiquer la composition des groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 8 variables au plus (¹). Il y a d'abord, dans le cas d'une variable :

(¹) A cause du grand nombre de cas possibles nous n'indiquons, pour plus de 4 variables, que les groupes $\mathcal{G}$ de première classe, ce qui permet la détermination de tous les groupes réels G à 8 variables au plus.

1° Le groupe à un paramètre complexe engendré par la transformation infinitésimale $z\frac{\partial f}{\partial z}$;

2° Le groupe à un paramètre réel engendré par la transformation infinitésimale $(h+ki)\,z\frac{\partial f}{\partial z}$.

Les groupes $\mathcal{G}$ que nous allons indiquer maintenant sont supposés ne contenir aucun sous-groupe invariant simple à un paramètre (complexe ou réel). Pour avoir tous les groupes $\mathcal{G}$ possibles, il suffirait de faire le produit des groupes suivants par l'un ou l'autre des deux groupes précédents à une variable, l'ordre réel serait ainsi augmenté de deux unités ou d'une unité. Les seuls groupes nouveaux qui sont de première classe proviennent de la multiplication d'un groupe $\mathcal{G}$ de première classe par le groupe à un paramètre réel $z\frac{\partial f}{\partial z}$.

Nous faisons précéder d'un astérisque les groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce. Les notations se comprennent d'elles-mêmes; la notation $\{\gamma, \gamma'\}$ indique l'existence de deux groupes simples conjugués de même structure, à paramètres imaginaires conjugués; la notation $g_3(B_4)$ désigne le groupe g_3 du type (B) de rang 4; la notation $g_3^5(B_4)$ indique le groupe isomorphe au précédent, qu'on obtient en le multipliant cinq fois par lui-même, au sens donné à cette expression dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLI, p. 64; enfin la notation $g_3^5(B_4)\times\gamma_1^2(C_2)$ indique le produit des deux groupes à paramètres distincts, $g_3^5(B_4)$ et $\gamma_1^2(C_2)$. Rappelons enfin que la lettre g se rapporte aux groupes à paramètres réels, la lettre γ aux groupes à paramètres complexes.

Groupes $\mathcal{G}$ à deux variables ($3\times3=9$ cas) :

$\gamma(A_1)$,	ordre réel	6
*$g(A_1)$,	»	3
$g^{(h)}(A_1)$,	»	3

Groupes $\mathcal{G}$ à trois variables ($7\times3=21$ cas) :

$\gamma^2(A_1)$,	ordre réel	6
*$g^2(A_1)$,	»	3
*$g^{(h)2}(A_1)$,	»	3
$\gamma_1(A_2)$,	»	16
*$g_1(A_2)$,	»	8
$g_1^{(h)}(A_2)$ (deux cas),	»	8

Groupes $\mathcal{G}$ à quatre variables ($20 \times 3 = 60$ cas) :

$\gamma^3(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g^3(A_1)$,	»	3
$g^{(h)3}(A_1)$,	»	3
$\gamma_1(A_3)$,	»	30
$^*g_1(A_3)$,	»	15
$g_1^{(q)}(A_3)$,	»	15
$g_1^{(h)}(A_3)$ (trois cas),	»	15
$\gamma_1(C_2)$,	»	20
$^*g_1(C_2)$,	»	10
$g_1^{(h)}(C_2)$ (deux cas),	»	10
$\gamma(A_1) \times \gamma(A_1)$,	»	12
$\gamma(A_1) \times g(A_1)$,	»	9
$\gamma(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	9
$^*\{\gamma, \gamma\}(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g(A_1)$,	»	6
$g(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	6
$^*g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	6

Groupes $\mathcal{G}$ de première classe à cinq variables (6 cas) :

$^*g^4(A_1)$,	ordre réel	3
$^*g^{(h)4}(A_1)$,	»	3
$^*g_1(A_4)$,	»	24
$^*g_2(C_2)$,	»	10
$^*g_2^{(h)}(C_2)$ (deux cas),	»	10

Groupes $\mathcal{G}$ de première classe à six variables (11 cas) :

$^*g^5(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g_1^2(A_2)$,	»	8
$^*g_2(A_3)$,	»	15
$^*g_2^{(q)}(A_3)$,	»	15
$^*g_2^{(h)}(A_3)$ ($\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$, deux cas),	»	15
$^*g_1(A_5)$,	»	24
$^*g_1(C_3)$,	»	21
$^*g(A_1) \times g^2(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g^{(h)2}(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g_1(A_2)$,	»	11

Groupes $\mathcal{G}$ de première classe à sept variables (8 cas) :

$^*g^6(A_1)$,	ordre réel	3
$^*g^{(h)6}(A_1)$,	»	3
$^*g_2(B_3)$ (quatre cas),	»	21
$^*g_1(G_2)$ (deux cas),	»	14

Groupes $\mathcal{G}$ de première classe à huit variables (23 cas)

$^{*}g^{7}(A_1)$,	ordre réel	3
$^{*}g_1(A_7)$,	»	63
$^{*}g_1(C_4)$,	»	36
$^{*}g_1(B_3)$ (deux cas : $\delta = 1$ ou 7),	»	21
$^{*}g_3(D_4)$ (cinq cas),	»	28
$^{*}g_1(A_2) \times g_2(A_2)$,	»	8
$^{*}g_1^{(h)}(A_2) \times g_2^{(h)}(A_2)$ (deux cas),	»	8
$^{*}g(A_1) \times g^{3}(A_1)$,	»	6
$^{*}g(A_1) \times g_1(A_3)$,	»	18
$^{*}g(A_1) \times g_1(C_2)$,	»	13
$^{*}g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)3}(A_1)$,	»	6
$^{*}g^{(h)}(A_1) \times g_1^{(q)}(A_3)$,	»	18
$^{*}g^{(h)}(A_1) \times g_1^{(h)}(C_2)$ (deux cas).	»	13
$^{*}g(A_1) \times \{\gamma, \gamma\}(A_1)$,	»	9
$^{*}g(A_1) \times g(A_1) \times g(A_1)$,	»	9
$^{*}g(A_1) \times g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	9

Les résultats précédents permettent de déterminer la composition des groupes réels *projectifs* G des espaces $E_n (n \leq 7)$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane; ces groupes proviennent de groupes linéaires à $n+1$ variables pour lesquelles on peut supposer que le groupe $\mathcal{G}$ associé, ou bien n'admet aucun sous-groupe invariant à un paramètre, ou bien n'admet que le sous-groupe invariant à un paramètre $iz\frac{\partial f}{\partial z}$. Nous indiquons ci-dessous le nombre de ces groupes pour $n \leq 11$.

Il existe :

2	groupes projectifs de l'espace	E_1,	à savoir	1	de 1re classe et	1	de 2e classe
3	»	E_2,	»	3	»	0	»
11	»	E_3,	»	6	»	5	»
6	»	E_4,	»	6	»	0	»
22	»	E_5,	»	11	»	11	»
8	»	E_6,	»	8	»	0	»
57	»	E_7,	»	23	»	34	»
16	»	E_8,	»	16	»	0	»
34	»	E_9,	»	16	»	18	»
9	»	E_{10},	»	9	»	0	»
122	»	E_{11},	»	41	»	81	»

XIX.

Nous allons, comme seconde application, déterminer tous les groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont isomorphes soit au groupe homographique de la droite réelle, soit au groupe des transformations homographiques de la droite complexe qui laissent invariante une antiinvolution de seconde espèce, soit au groupe homographique de la droite complexe.

Ces trois groupes homographiques g, g^h et γ sont représentés, en coordonnées homogènes, par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x'_1 = a x_1 + b x_2, \\ x'_2 = c x_1 + d x_2. \end{cases}$$

les coefficients a, b, c, d étant des nombres réels arbitraires dans le premier cas, des nombres complexes arbitraires dans le troisième cas, des nombres complexes liés par les relations

$$d = \bar{a}, \qquad c = -\bar{b},$$

dans le deuxième cas.

I. Dans le premier cas le groupe G le plus général est le groupe g^p qui indique comment sont tranformées linéairement les expressions

$$x_1^p, \quad x_1^{p-1} x_2, \quad x_1^{p-2} x_2^2, \quad \ldots, \quad x_2^p,$$

quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire (1) à coefficients réels. A un autre point de vue on peut regarder le groupe G comme celui qui indique comment sont transformés les coefficients réels de la forme binaire

$$(2)\qquad u_0 x_1^p + \frac{p}{1} u_1 x_1^{p-1} x_2 + \frac{p(p-1)}{1.2} u_2 x_1^{p-2} x_2^2 + \ldots + u_p x_2^p,$$

quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire réelle (1). C'est le groupe projectif réel de la courbe unicursale normale de l'espace E_p.

II. Dans le second cas, le groupe $\mathcal{G}$ associé à G est le groupe g^{hp} qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme (2) quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire (1) où l'on suppose

$$d = \bar{a}, \qquad c = -\bar{b}.$$

Ce groupe $\mathcal{G}$ est de seconde classe si p est impair, de première classe si p est pair. Le groupe réel G auquel $\mathcal{G}$ est associé est donc à $2(p+1)$ variables si p est impair, à $p+1$ si p est pair. Dans ce dernier cas, on obtient les variables réelles de G en prenant les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes u supposées liées par les relations

$$u_0 = \bar{u}_p, \qquad u_1 = -\bar{u}_{p-1}, \qquad u_2 = \bar{u}_{p-2}, \qquad \ldots, \qquad u_{\frac{p}{2}} = (-1)^{\frac{p}{2}} \bar{u}_{\frac{p}{2}}.$$

Le groupe G au nombre minimum de variables correspond à $p=2$ et à la forme binaire

$$u_0 x_1^2 + 2u_1 x_1 x_2 + u_2 x_2^2 \qquad (u_0 = \bar{u}_2,\ u_1 = -\bar{u}_1),$$

c'est le groupe projectif de la conique

$$u_1^2 - u_0 u_2 = 0,$$

qui s'écrit encore, en coordonnées réelles,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \qquad (u_0 = v_1 + iv_2,\ u_2 = v_1 - iv_2,\ u_1 = iv_3).$$

A un autre point de vue on retrouve une relation bien connue entre le groupe des rotations de l'espace et le groupe homographique

$$x' = \frac{ax+b}{-\bar{b}x+\bar{a}}.$$

III. Dans le troisième cas, le groupe $\mathcal{G}$ peut être de première catégorie ou formé de deux sous-groupes invariants simples de troisième catégorie.

1° On obtient d'abord le groupe $\mathcal{G}$, ou γ^p, qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme binaire (2) quand on effectue sur x_1 et x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes. Tous ces groupes $\mathcal{G}$ sont de seconde classe et sont associés à des groupes réels G à $2(p+1)$ variables.

2° On obtient ensuite le groupe $\mathcal{G}$, ou $\{\gamma^p, \gamma^q\}$, qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme mixte

$$\sum_{i,k} u_{ik} x_1^{p-i} x_2^i y_1^{q-k} y_2^k, \tag{3}$$

homogène de degré p en x_1 et x_2, homogène de degré q en y_1 et y_2, quand on effectue sur x_1 et x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes, en effectuant simultanément sur y_1 et y_2 la substitution linéaire à coefficients complexes conjugués. Les premiers groupes $\mathcal{G}$ rentrent d'ailleurs dans les précédents en supposant $q = 0$.

Ces groupes $\mathcal{G}$ sont de seconde classe si $p \neq q$; ils sont de première classe si $p = q$; dans ce cas les variables de G sont les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes u_{ik} supposées liées par les relations

$$u_{ik} = \overline{u}_{ki}.$$

La forme mixte (3), égalée à zéro, définit dans ces conditions une antiinvolution réelle de degré p, le point $\frac{y_1}{y_2}$ étant le transformé du point $\frac{x_1}{x_2}$.

Les groupes G au nombre minimum de variables sont au nombre de deux :

1° Le groupe G à 4 variables qui admet pour associé le groupe γ des substitutions linéaires complexes à 2 variables. En posant

$$x_1 = u_1 + iu_2, \quad x_2 = u_3 + iu_4, \quad a = \alpha + i\alpha',$$
$$b = \beta + i\beta', \quad c = \gamma + i\gamma', \quad d = \delta + i\delta',$$

les équations de ce groupe sont :

$$u'_1 = \alpha u_1 - \alpha' u_2 + \beta u_3 - \beta' u_4,$$
$$u'_2 = \alpha' u_1 + \alpha u_2 + \beta' u_3 + \beta u_4,$$
$$u'_3 = \gamma u_1 - \gamma' u_2 + \delta u_3 - \delta' u_4,$$
$$u'_4 = \gamma' u_1 + \gamma u_2 + \delta' u_3 + \delta u_4.$$

Ce groupe fournit une représentation réelle des points complexes d'une droite. Au point de coordonnée non homogène $x + yi$ correspond dans l'espace E_3 le lieu des points réels satisfaisant à la relation

$$\frac{u_1 + iu_2}{u_3 + iu_4} = x + yi,$$

c'est-à-dire la droite

$$u_1 = xu_3 - yu_4,$$
$$u_2 = yu_3 + xu_4.$$

Aux points complexes de la droite correspondent donc dans l'espace les diverses droites de la congruence

$$p_{13} - p_{24} = 0, \qquad p_{14} + p_{23} = 0.$$

Toutes ces droites rencontrent deux droites fixes imaginaires conjuguées.

Toute transformation homographique de la droite complexe se traduit dans l'espace par une transformation projective laissant cette congruence invariante.

2° Le groupe G à 4 variables qui admet pour associé le groupe $\{\gamma, \gamma\}$ et qui indique comment sont transformés les coefficients de la forme mixte

$$(4) \qquad u_1 x_1 y_1 + (u_2 + i u_3) x_1 y_2 + (u_2 - i u_3) x_2 y_1 + u_4 x_2 y_2,$$

quand on effectue sur x_1, x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes, et quand on effectue simultanément sur y_1, y_2 la substitution à coefficients conjugués. Les transformations de ce groupe sont :

$$\begin{aligned}
u'_1 &= (\alpha^2 + \alpha'^2) u_1 + 2(\alpha\gamma + \alpha'\gamma') u_2 + 2(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') u_3 + (\gamma^2 + \gamma'^2) u_4, \\
u'_2 &= (\alpha\beta + \alpha'\beta') u_1 + (\alpha\delta + \alpha'\delta' + \beta\gamma + \beta'\gamma') u_2 \\
&\qquad + (\alpha\delta' - \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta') u_3 + (\gamma\delta + \gamma'\delta') u_4, \\
u'_3 &= (\beta\alpha' - \alpha\beta') u_1 + (\delta\alpha' - \alpha\delta' + \gamma\beta' - \beta\gamma') u_2 \\
&\qquad + (\alpha\delta + \alpha'\delta' - \beta\gamma - \beta'\gamma') u_3 + (\delta\gamma' - \gamma\delta') u_4, \\
u'_4 &= (\beta^2 + \beta'^2) u_1 + 2(\beta\delta + \beta'\delta') u_2 + 2(\beta\delta' - \delta\beta') u_3 + (\delta^2 + \delta'^2) u_4.
\end{aligned}$$

C'est le groupe projectif réel de la quadrique

$$(5) \qquad (u_2 + i u_3)(u_2 - i u_3) - u_1 u_4 = u_2^2 + u_3^2 - u_1 u_4 = 0.$$

Ce groupe fournit une autre représentation réelle des points complexes d'une droite. Il suffit de faire correspondre au point de coordonnée non homogène $x + yi$ la forme mixte

$$[x_1 - (x + yi) x_2][y_1 - (x - yi) y_2],$$

c'est-à-dire le point

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2 + i u_3}{-x + yi} = \frac{u_2 - i u_3}{-x - yi} = \frac{u_4}{x^2 + y^2},$$

qui appartient à la quadrique (5). Cette représentation est au fond

identique à celle par laquelle Riemann représente les nombres complexes par les points d'une sphère. Toute transformation homographique de la droite complexe se traduit dans l'espace par une transformation projective laissant la sphère invariante. Il y a ainsi équivalence entre la Géométrie projective de la droite complexe et la Géométrie non euclidienne hyperbolique de l'espace réel.

Les coefficients de la forme (4) sont transformés comme les coefficients de l'équation

$$u_1\bar{x}_1y_1+(u_2+iu_3)\bar{x}_1y_2+(u_2-iu_3)\bar{x}_2y_1+u_4\bar{x}_2y_2=0,$$

quand on effectue sur x_1, x_2 et y_1, y_2 la *même* substitution linéaire à coefficients complexes. Cette équation définit une *antiinvolution*. Il y a donc correspondance entre les antiinvolutions de la droite complexe et les points de l'espace réel. Les antiinvolutions de première espèce sont celles pour lesquelles $u_2^2+u_3^2-u_1u_4$ est positif, les antiinvolutions de seconde espèce celles pour lesquelles $u_2^2+u_3^2-u_1u_4$ est négatif. Dans la représentation de Riemann les points extérieurs à la sphère représentent les antiinvolutions de première espèce, les points intérieurs celles de seconde espèce. Les éléments doubles d'une antiinvolution sont représentés par les points de contact, avec la sphère de Riemann, du cône ayant pour sommet le point représentatif de l'antiinvolution.

XX.

Le problème résolu dans le paragraphe précédent est un cas particulier du problème suivant :

Étant donné un groupe projectif d'un espace complexe, représenter les points complexes de cet espace par des figures d'un espace réel, de telle sorte que dans ce nouvel espace le groupe projectif donné reste un groupe projectif réel.

Ce problème se résout facilement par les mêmes considérations lorsque du moins les deux groupes ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

Indiquons la solution la plus simple du problème dans le cas où le groupe donné est le groupe projectif général de l'espace complexe E_{n-1},

le groupe quaternionien de l'espace E_{2n-1} ou l'un des groupes hermitiens de l'espace E_{n-1}.

Dans chaque cas, le groupe réel G le plus simple de seconde classe qui soit isomorphe au groupe donné de l'espace complexe E_{n-1} se déduit de ce groupe lui-même en mettant en évidence les parties réelles et les coefficients de i des coordonnées homogènes complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$x_k = u_k + iv_k.$$

Au point complexe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspond dans l'espace réel E_{2n-1}, la droite lieu des points

$$U_k = \lambda u_k - \mu v_k, \qquad V_k = \lambda v_k + \mu u_k,$$

où λ et μ prennent toutes les valeurs réelles possibles, u_k et v_k ayant des valeurs données. Par cette représentation le groupe devient un groupe projectif de l'espace E_{2n-1}.

I. Le groupe réel G le plus simple de première classe qui soit isomorphe au groupe projectif de l'espace complexe E_{n-1} est celui qui indique comment sont transformés les coefficients de l'hyperquadrique réelle

$$\Sigma u_{ik} x_i \bar{x}_k = 0, \qquad u_{ik} = \bar{u}_{ki}, \tag{1}$$

quand on effectue sur les x_i une substitution linéaire à coefficients complexes. Ce groupe G est un groupe projectif dans l'espace E_{n^2-1}. A un point complexe (x) de l'espace E_{n-1} on peut faire correspondre le plan réel de l'espace E_{n^2-1} défini par l'équation (1). A un point réel de E_{n^2-1} on peut faire correspondre l'hyperquadrique (1), qui définit encore si l'on veut une *anticorrélation*, celle qui fait correspondre au point (x) le plan d'équation

$$\Sigma u_{ik} X_i \bar{x}_k = 0.$$

II. Le groupe quaternionien $\mathcal{G}$ de l'espace complexe E_{2n-1} est formé des transformations projectives complexes qui laisse invariante l'anti-involution de seconde espèce

$$X_{2i-1} = \bar{x}_{2i}, \qquad X_{2i} = -\bar{x}_{2i-1}.$$

Le groupe $\mathcal{G}$ le plus simple de première classe ayant la même structure est le groupe $g_2^{(h)}$ qui transforme les droites de l'espace E_{2n-1} ; il admet l'anti-involution de première espèce

$$X_{2i-1,2i} = \bar{x}_{2i-1,2i}, \qquad X_{2i-1,2j-1} = \bar{x}_{2i,2j}, \qquad X_{2i-1,2j} = -\bar{x}_{2i,2j-1};$$

il est à $n(2n-1)$ variables; le groupe réel G auquel il est associé est aussi à $n(2n-1)$ variables.

Dans le cas $n=2$, le groupe réel G à 6 variables est au fond le groupe projectif de la quadrique

$$(2) \qquad x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0,$$

où l'on a

$$x_{12} = \bar{x}_{12}, \qquad x_{34} = \bar{x}_{34}, \qquad x_{13} = \bar{x}_{24}, \qquad x_{14} = -\bar{x}_{23};$$

c'est donc encore le groupe non euclidien de l'espace hyperbolique E_5. Un point complexe de l'espace E_3 peut être représenté dans E_5 par la figure réelle formée d'un point réel de la quadrique (2) et de deux multiplicités planes imaginaires conjuguées à deux dimensions situées dans le plan tangent à la quadrique (2) au point considéré.

III. Le groupe hermitien $\mathcal{G}$ de l'espace complexe E_{n-1} est formé des transformations projectives complexes qui laissent invariante l'hyperquadrique

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n \bar{x}_n = 0.$$

On obtient un groupe $\mathcal{G}$ de première classe ayant la même structure en considérant le connexe

$$(3) \qquad \Sigma a_{ik} x_i u_k = 0;$$

quand on effectue une transformation projective hermitienne, les x_i étant regardés comme les coordonnées homogènes d'un point, les u_k comme celles d'un plan, ce connexe est changé en un autre de coefficients a'_{ik}. On obtient ainsi à n^2 variables complexes un groupe linéaire qui laisse invariante la multiplicité plane

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = 0,$$

et l'anti-involution de première espèce

$$A_{ik} = \varepsilon_i \varepsilon_k \bar{a}_{ki}.$$

En posant donc

$$a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=0, \qquad a_{ik}=\varepsilon_i\varepsilon_k\bar{a}_{ki},$$

on obtient un groupe linéaire réel G à n^2-1 variables, qui fournit lui-même un groupe projectif réel de l'espace E_{n^2-2} (1).

Un point complexe (x) de l'espace E_{n-1} peut être représenté par une multiplicité plane réelle de l'espace E_{n^2-2} dont les équations sont

$$\frac{\sum a_{i1}x_i}{x_1}=\frac{\sum a_{i2}x_i}{x_2}=\ldots=\frac{\sum a_{in}x_i}{x_n};$$

ces équations expriment que la transformation projective

$$X_k=\sum_i a_{ik}x_i,$$

définie par le connexe (3), laisse invariant le point (x).

Dans le cas $n=4$, on a, si

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4=1,$$

un autre groupe plus simple $\mathcal{G}$ de première classe en formant le groupe $g_2^{(h)}$. C'est au fond le groupe projectif de la quadrique de E_5 définie par l'équation

$$(4) \qquad x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}=0,$$

où l'on a

$$x_{12}=\varepsilon_1\varepsilon_2\bar{x}_{34}, \qquad x_{13}=-\varepsilon_1\varepsilon_3\bar{x}_{24}, \qquad x_{14}=\varepsilon_1\varepsilon_4\bar{x}_{23}.$$

Un point complexe (x) de l'espace E_3 peut être représenté par a figure réelle formée d'une multiplicité plane imaginaire à deux dimensions, génératrice de la quadrique (4) et de la multiplicité génératrice imaginaire conjuguée.

Dans le cas $n=6$, on a aussi, si

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6=-1,$$

un groupe de première classe G à 20 variables, au lieu de 35, en considérant le groupe $g_3^{(h)}$.

(1) *Voir* E. STUDY, *Math. Ann.*, t. LX, 1905, p. 360.

Des polynomes invariants par une substitution linéaire (RECTIFICATION);

PAR CAMILLE JORDAN.

La Note publiée sous ce titre dans le présent Volume (p. 97-104), contient une inexactitude que M. H. Hilton a eu l'obligeance de nous signaler, et qu'il est nécessaire de rectifier.

Un polynome Φ satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles $D\Phi = 0$, n'est pas par là même invariant, par la substitution S_2, comme nous l'avons affirmé par inadvertance. Il n'est donc pas vrai qu'un polynome invariant doive se décomposer en polynomes isobares, invariants séparément.

En particulier, les polynomes X_k, Y_k, Z_k de la page 103 ne sont pas invariants, mais on doit les remplacer par d'autres polynomes ξ_k, η_k, ζ_k linéaires comme eux par rapport aux variables d'indice > 1 (mais non isobares) et construits comme il suit :

Posons pour abréger

$$P_0 = x_0,\ P_1 = x_1,\ \ldots,\ P_n = \frac{x_1(x_1 - x_0)\ldots[x_1 - (n-1)x_0]}{n!}$$

On aura évidemment

$$x_1 P_n = [(x_1 - n x_0) + n x_0] P_n = (n+1) P_{n+1} + n x_0 P_n.$$

D'autre part, le changement de x_1 en $x_1 + x_0$ accroît P_n de $x_0 P_{n-1}$.

On voit dès lors que le polynome

$$\xi_k = x_0^{k-1} x_k - x_0^{k-2} P_1 x_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-2} x_0 P_{k-2} x_2 \\ + (-1)^{k-1} [(k-1) P_k + x_0 (k-2) P_{k-1}]$$

est invariant par S_2, car les termes de son accroissement se détruisent deux à deux, sauf les suivants

$$(-1)^{k-2} x_0 P_{k-2} x_1 + (-1)^{k-1} x_0 [(k-1) P_{k-1} + (k-2) x_0 P_{k-2}],$$

dont la somme est nulle en vertu de la formule récurrente (1).

Les polynomes η_k, ζ_k se formeront de même.

Prix Léon Marie.

(Fondé par Madame Veuve Léon Marie.)

Ce prix est destiné à récompenser une œuvre importante sur les matières qui intéressent la science actuarielle.

Il sera décerné tous les ans par le Jury spécial (comprenant les Membres du Bureau et de la Commission de contrôle) et proclamé à l'Assemblée générale ordinaire de l'année suivante. Il ne sera pas divisé. Son montant est de 500^{fr}.

Pourront concourir les Ouvrages imprimés en français, parus depuis cinq ans au plus, et déposés avant le 15 septembre de l'année du concours.

Ne pourront concourir les thèses d'agrégation à l'*Institut des Actuaires français*.

Institut des Actuaires français,

5, rue Las-Cases, Paris.

Sur le problème de Dirichlet;

PAR J. LE ROUX.

INTRODUCTION.

Beaucoup de théories mathématiques et de problèmes d'applications conduisent à envisager les fonctions qui dépendent de toutes les valeurs que prennent des fonctions arbitraires dans un certain domaine. Les fonctions de cette nature ont été l'objet de recherches importantes sous des formes diverses : fonctions de lignes de Volterra et d'Arzela, fonctionnelles de M. Hadamard.

Les valeurs d'une fonction arbitraire peuvent être considérées comme constituant un ensemble de variables indépendantes, qui correspondent, élément par élément, aux divers points d'un domaine continu. C'est ce que nous appelons un ensemble *continu* de variables indépendantes, sans supposer, d'ailleurs, que les fonctions arbitraires soient elles-mêmes continues.

Lorsqu'on se borne aux fonctions arbitraires analytiques, chacune des fonctions se trouvant définie par sa valeur et celles de ses dérivées en un point, on peut prendre ces valeurs pour variables indépendantes. Les variables considérées forment alors un ensemble dénombrable. C'est le cas qui se présente dans la théorie analytique des équations aux dérivées partielles [1].

La théorie des fonctions d'ensembles infinis continus et celle des fonctions d'ensembles dénombrables présentent des analogies et des propriétés communes.

Les variables d'un ensemble dénombrable se distinguent habituellement les unes des autres par des indices entiers, simples ou mul-

[1] *Recherches sur les équations aux dérivées partielles* (*Journ. de Math.*, 5e série, t. IX, 1903, p. 403).

tiples. Ce mode de notation revient à faire correspondre, élément par élément, l'ensemble des variables et l'ensemble des nombres entiers. On peut de même individualiser les variables d'un ensemble continu, en les affectant d'indices qui désignent les points ou les coordonnées des points qui leur correspondent. Par exemple, pour les variables d'un ensemble (z) correspondant aux points M d'un espace linéaire (x) ou superficiel (x, y), on emploiera les notations z_M, z_x, $z_{x,y}$. Les indices M, x, (x, y) interviennent ici, non pour déterminer les valeurs des quantités z, comme dans la théorie des fonctions, mais simplement pour individualiser les variables en les distinguant les unes des autres.

Dans le cas d'un nombre limité de variables x_1, x_2, ..., x_n, un système déterminé de valeurs attribuées à ces variables définit ce qu'on appelle un point de l'espace à n dimensions. Cette conception a été étendue au cas d'un ensemble infini dénombrable.

Dans le cas d'un ensemble continu (z), correspondant aux points M d'un espace (x), un ensemble déterminé de valeurs des z_x définit une fonction $f(x)$ des points de l'espace (x). La fonction de l'indice est donc, pour les ensembles continus, l'élément analogue au point des ensembles dénombrables.

Nos calculs effectifs ne peuvent comprendre qu'un nombre limité d'opérations, effectuées sur un nombre limité d'éléments. Nous n'atteignons, par le calcul, les ensembles infinis que par l'intermédiaire d'ensembles finis de plus en plus étendus ou de plus en plus denses, et en passant du fini à l'infini par des considérations de convergence ou de continuité. La théorie des séries et des fonctions convergentes d'une part, la définition de l'intégrale définie considérée comme limite d'une somme, d'autre part, caractérisent les procédés employés depuis les origines de la Géométrie, pour soumettre au calcul les ensembles infinis d'éléments.

J'ai appliqué dans ce Mémoire les considérations qui précèdent à l'intégrale de Dirichlet et à l'équation de Laplace.

Considérant l'intégrale comme la limite d'une somme finie, j'ai étudié la variation de cette somme. Le passage à la limite suit ainsi l'étude de la variation, au lieu de la précéder, comme dans la méthode ordinaire du calcul des variations. L'un des avantages de ce procédé,

c'est qu'il permet d'envisager les cas où l'intégrale limite n'existerait pas. D'un autre côté, la condition de minimum s'exprime par un système fini d'équations linéaires ordinaires, qu'on peut discuter par les procédés élémentaires de l'Algèbre, sans s'occuper des conditions restrictives qu'impose l'emploi du calcul intégral. Pour étudier la forme limite de la solution dans le cas des réseaux de densité indéfiniment croissante, il suffit d'en connaître la forme pour un système de régions finies. Je me suis servi de régions rectangulaires. Pour le rectangle, le système de nos équations linéaires peut être facilement résolu sous forme finie, et, *quelle que soit la discontinuité des valeurs données à la frontière, quand le réseau est très dense, les valeurs trouvées pour les inconnues diffèrent très peu des valeurs correspondantes d'une fonction harmonique.*

Ce résultat m'a paru présenter un certain intérêt pour les applications à la Physique, dans l'hypothèse de la constitution discontinue de la matière.

J'emploie l'intégrale de Dirichlet principalement pour former le système d'équations linéaires servant à déterminer les solutions approchées, plutôt que pour démontrer l'existence de la solution limite.

Nos calculs sont effectués seulement pour le cas de deux variables, mais la méthode est applicable quel que soit le nombre des variables indépendantes.

CHAPITRE I.

L'INTÉGRALE DE DIRICHLET CONSIDÉRÉE COMME FACTEUR QUADRATIQUE.

1. *Formation des réseaux.* — L'intégrale de Dirichlet étendue à un domaine (D) du plan des (x, y)

$$J(u) = \iint_{(D)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\,dy$$

est une fonction de l'ensemble infini des valeurs arbitraires attribuées à la fonction u, aux divers points du domaine. Pour trouver dans cet ensemble infini un ensemble fini de variables indépendantes qui donne lieu à la considération de la même limite, j'imagine qu'on couvre le domaine (D) d'un réseau de triangles. Ce réseau devra être constitué

de telle façon que deux triangles ne se superposent pas, même partiellement, et que deux triangles contigus qui ont en commun une portion de côté aient aussi en commun les deux sommets situés sur le côté considéré. J'appelle *nœuds* du réseau les sommets des triangles.

A chaque nœud $M(x, y)$ du réseau, je fais correspondre une variable indépendante $z_{x,y}$. A tout système de valeurs de ces variables je fais ensuite correspondre une fonction $u(x, y)$, qui prend sur les nœuds les valeurs considérées $z_{x,y}$ et qui, à l'intérieur des triangles, est linéaire en x, y. La fonction $u(x, y)$ serait figurée par une surface polyédrale à facettes triangulaires. A la frontière du domaine on pourrait, soit remplacer les arcs du contour par leurs cordes, de manière à obtenir des triangles rectilignes, soit conserver les arcs de courbes et remplacer les faces planes de la surface polyédrale par des surfaces coniques ou d'autres surfaces appropriées. Au point de vue du passage à la limite, quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau, ces divers procédés sont d'ailleurs, en général équivalents.

2. *Expression de l'intégrale de Dirichlet par une forme quadratique.* — Considérons un triangle du réseau. Soient $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ les trois sommets et z, z_1, z_2 les valeurs correspondantes des variables (z). Le plan correspondant serait représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où X, Y, Z désignent les coordonnées courantes. L'équation, résolue par rapport à Z, prend la forme

$$Z = pX + qY + r,$$

en posant

$$p = -\frac{\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad q = -\frac{\begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Nous représenterons, pour abréger, par (y, z), (z, x), (x, y) les déterminants qui figurent dans ces expressions, et nous écrirons

$$(1) \qquad p = -\frac{(y, z)}{(x, y)}, \qquad q = -\frac{(z, x)}{(x, y)}.$$

Les axes étant supposés rectangulaires, et le triangle MM_1M_2, parcouru dans le sens positif, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(x, y)$. L'intégrale de Dirichlet relative à la surface polyédrale définie plus haut est donc

$$(2) \qquad J(u) = \frac{1}{2}\sum \frac{(y, z)^2 + (z, x)^2}{(x, y)},$$

la somme Σ étant étendue à tous les triangles du réseau. Cette même expression convient même à la frontière, si l'on y considère seulement des triangles rectilignes. Nous étudierons plus loin le cas des triangles curvilignes.

On voit que l'intégrale $J(u)$ s'exprime par une forme quadratique des variables $z_{x,y}$. Nous poserons

$$(3) \qquad J(u) = F(z).$$

3. *Réseaux rectangulaires.* — Parmi les réseaux, je considère en particulier ceux qui sont formés de triangles rectangles égaux, ayant deux côtés parallèles aux axes de coordonnées. On obtient de pareils réseaux en divisant d'abord le plan en rectangles égaux par des parallèles aux axes : les parallèles à Ox étant distantes d'une même quantité h, et les parallèles à Oy d'une même quantité k ; on coupe ensuite chaque rectangle en deux triangles par une diagonale. Les valeurs de p et de q des formules (1) prennent la forme

$$(4) \qquad p = \frac{z_{x+h,y} - z_{xy}}{h}, \qquad q = \frac{z_{x,y+k} - z_{xy}}{k},$$

et la forme quadratique $F(z)$ devient

$$(5) \qquad J(u) = F(z) = \frac{1}{2}\sum\left[\frac{(z_{x+h,y} - z_{xy})^2}{h^2} + \frac{(z_{x,y+k} - z_{xy})^2}{k^2}\right]hk.$$

Chaque valeur de p ou de q est commune à deux triangles contigus. On peut donc, dans la formule (5), supprimer le facteur $\frac{1}{2}$ devant le

signe Σ, pourvu que la sommation soit considérée comme s'étendant aux côtés des triangles parallèles aux axes, et non plus aux triangles eux-mêmes.

Si l'on suppose enfin $h = k$, il y a une simplification nouvelle, et l'on a, en supprimant le facteur $\frac{1}{2}$, suivant la remarque précédente,

$$(6) \qquad F(z) = \sum (z_{x+h,y} - z_{xy})^2 + (z_{x,y+k} - z_{xy})^2.$$

4. *Calcul des dérivées.* — Prenons d'abord la formule générale de p et q donnée par les équations (1). Nous avons

$$(7) \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x, y)}, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x, y)};$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{xy}} = \sum q(x_2 - x_1) - p(y_2 - y_1).$$

La somme Σ s'étend ici à tous les triangles du réseau qui ont un sommet au point $M(x, y)$. Dans ces triangles, l'ensemble des côtés opposés au point M forme un contour polygonal fermé (L) entourant le sommet M, et l'on reconnaît immédiatement que la dérivée $\frac{\partial F(z)}{\partial z_{xy}}$ se ramène à l'intégrale

$$\int q\,dx - p\,dy,$$

évaluée suivant le contour (L). Le sens du parcours est déterminé par la condition, déjà exprimée, que les déterminants (x, y) soient positifs. Lorsque le nœud M est situé sur le contour limite du domaine (D), la ligne (L) n'est plus fermée : elle s'arrête au contour.

Nous voyons paraître ici, avec une signification intéressante, une intégrale qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions harmoniques : c'est l'intégrale de la dérivée normale. Si l'on désigne par ds l'élément d'arc de la ligne (L), par dn un déplacement infiniment petit suivant la *normale intérieure* à cette ligne, on a

$$q\,dx - p\,dy = \frac{du}{dn}\,ds.$$

La formule (8) devient, par conséquent,

$$(8') \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{x,y}} = \int_{(L)} \frac{du}{dn} ds.$$

Considérées comme fonctions des variables $z_{x,y}$, les dérivées partielles de la forme quadratique $F(z)$ sont des formes linéaires dont il est utile d'avoir l'expression. Il suffit pour cela de considérer la partie relative à un triangle MM_1M_2. Posons

$$MM_1 = r_1, \qquad MM_2 = r_2, \qquad M_1M_2 = r_{12};$$

désignons par h la hauteur issue du sommet M, et par M_1, M_2, les angles à la base du triangle. En remplaçant p et q par leurs valeurs dans la formule (8), on trouve

$$q(x_2 - x_1) - p(y_2 - y_1) = z\frac{r_{12}}{h} - \frac{z_1 r_2 \cos M_2 + z_2 r_1 \cos M_1}{h};$$

d'où l'on tire, en faisant la somme des expressions semblables, pour tous les triangles ayant un sommet en M,

$$(9) \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{x,y}} = z_{x,y}\sum \frac{r_{12}}{h} - \sum \frac{z_1 r_2 \cos M_2 + z_2 r_1 \cos M_1}{h}.$$

Remarquons que le coefficient de $z_{x,y}$, $\sum \frac{r_{12}}{h}$, est égal à la somme des coefficients des autres variables z_i dans la seconde somme Σ, et que, de plus, si les triangles du réseau n'ont pas d'angles obtus, tous les coefficients, $\frac{r_i \cos M_i}{h}$, sont positifs.

5. *Forme limite des dérivées.* — Pour les réseaux particuliers que nous avons considérés, l'expression de la dérivée se déduit des formules (5) ou (6). Partant de la formule (5) nous avons, pour les nœuds intérieurs du réseau,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z_{x,y}} = \frac{k}{h}(2z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y}) + \frac{h}{k}(2z_{x,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k}),$$

ou encore

$$(10)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{x,y}} = -hk\left[\frac{1}{h}\left(\frac{z_{x+h,y}-z_{x,y}}{h}-\frac{z_{x,y}-z_{x-h,y}}{h}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{z_{x,y+k}-z_{x,y}}{k}-\frac{z_{x,y}-z_{x,y+k}}{k}\right)\right].$$

La forme limite de cette expression fait apparaître le premier membre de l'équation de Laplace

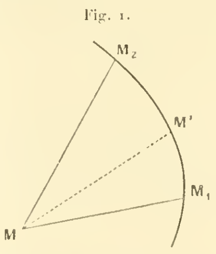
$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{x,y}} = -\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\,dx\,dy\,\Delta u.$$

Enfin, lorsque le point M est situé sur la frontière, il faut encore modifier cette forme limite. Le contour (C) étant supposé polygonal, soient M_0 et M_1 les deux sommets contigus au sommet M. La ligne (L) définie plus haut, s'arrête aux sommets M_0 et M_1. Appelons (S) l'aire comprise entre la ligne L et la portion $\mathrm{M}_0\mathrm{M}\mathrm{M}_1$ du polygone frontière (C). On a, dans ce cas,

$$\lim \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_{x,y}} = -\int_{\substack{\mathrm{M}_0\\ (\mathrm{C})}}^{\mathrm{M}_1}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds - \iint_{(\mathrm{S})}\Delta u\,dx\,dy.$$

6. *Cas des triangles qui ont leur base à la frontière.* — Pour les triangles dont la base est formée par un arc de frontière, il y aurait lieu de modifier légèrement les résultats précédents, si l'on voulait éviter de considérer le contour curviligne comme la limite d'un contour polygonal inscrit.

Fig. 1.



Soit (*fig.* 1) le triangle $\mathrm{M}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, dont la base $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ est un arc de

courbe rectifiable. Nous désignons par ds la différentielle de cet arc, et nous supposons définie en chaque point $M'(x', y')$ de M_1M_2 la valeur ζ d'une fonction continue de l'arc, admettant une dérivée finie $\frac{d\zeta}{ds}$. Nous déterminons ainsi une ligne $(\mathcal{L})$ de l'espace. Imaginons une portion de cône ayant pour directrice la ligne $(\mathcal{L})$ et pour sommet un point $S(x, y, z)$ qui se projette en M sur le plan xOy. L'intégrale de Dirichlet I, relative à ce cône, a pour valeur

$$I = \frac{1}{2}\int_{M_1M_2} \frac{[(y'-y)\,d\zeta - (\zeta - z)\,dy']^2 + [(x'-x)\,d\zeta - (\zeta - z)\,dx']^2}{(x'-x)\,dy' - (y'-y)\,dx'}.$$

On peut la transformer en introduisant des coordonnées polaires, le pôle étant en M. Posons $MM' = r$; désignons par θ l'angle de MM' avec une direction fixe, par v l'angle que forme la tangente en M' au contour avec la direction du rayon vecteur MM', et par ϖ la longueur de la perpendiculaire abaissée de M sur cette tangente.

L'intégrale I prend la forme

$$(11) \qquad I = \frac{1}{2}\int_{M_1M_2} \frac{r^2\,d\zeta^2 - 2r(\zeta - z)\,d\zeta\,dr + (\zeta - z)^2\,ds^2}{\varpi\,ds},$$

et l'on trouve ensuite

$$(12) \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = \int_{M_1M_2}\left(z - \zeta + r\frac{d\zeta}{ds}\cos v\right)\frac{ds}{\varpi}.$$

Lorsque la densité du réseau croît indéfiniment, r tendant vers zéro, et $\frac{d\zeta}{ds}$ restant inférieure à une limite finie, le terme $r\frac{d\zeta}{ds}\cos v$ devient, en général, négligeable. La forme de l'intégrale exige, pour être applicable, que la tangente en aucun point de l'arc M_1M_2 ne vienne passer par le point M, ni ne tende asymptotiquement vers ce point.

7. *Conditions de minimum.* — Supposons qu'on donne les valeurs des variables qui correspondent à un certain ensemble de nœuds (E). On peut alors déterminer les variables restantes par la condition que l'intégrale $F(z)$ soit un minimum. Nous désignerons par ξ, η les coordonnées des nœuds du premier ensemble (E), et par $\zeta(\xi, \eta)$ les valeurs données des variables correspondantes. Les inconnues $z_{x,y}$ devront

vérifier le système linéaire

$$\frac{\partial F}{\partial z_{xy}} = 0, \tag{13}$$

dans lequel on suppose que le point (x, y) désigne successivement tous les nœuds qui n'appartiennent pas à l'ensemble (E). Ce système contient autant d'équations que d'inconnues. Il admet une solution bien déterminée, car le déterminant est l'un des mineurs principaux de la forme quadratique positive $F(z)$, lesquels sont tous différents de zéro, puisque la forme ne s'annule que si toutes les variables z ont des valeurs égales.

8. *Forme de la solution.* — Les équations (13) développées prennent la forme suivante, d'après la formule (9) :

$$z_{x,y} \sum \frac{r_{12}}{h} - \sum \frac{z_1 r_2 \cos M_2 + z_2 r_1 \cos M_1}{h} = 0. \tag{14}$$

Nous supposerons désormais que les triangles du réseau n'ont pas d'angles obtus. Dans ce cas, l'équation (14) résolue par rapport à $z_{x,y}$ donne un résultat de la forme

$$z_{x,y} = \sum \alpha_i z_i, \tag{15}$$

où tous les coefficients α_i sont positifs et ont une somme égale à l'unité. Les variables z_i correspondent aux nœuds du contour polygonal (L) défini au nº 4.

La formule (15) montre que $z_{x,y}$ est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs z_i. Ce résultat correspond à la propriété bien connue des fonctions harmoniques dans un domaine de n'avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de ce domaine.

Si l'on résout le système (14) on obtient, pour les inconnues $z_{x,y}$, des valeurs qui s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités données $\zeta_{\xi,\eta}$,

$$z_{x,y} = \sum \alpha(x, y, \xi, \eta) \zeta_{\xi,\eta}. \tag{16}$$

Les coefficients de ce développement sont tous positifs et vérifient,

comme ceux de la formule (15), *la relation*

$$\sum_{\xi, \eta} \alpha(x, y, \xi, \eta) = 1. \tag{17}$$

En effet, si l'on élimine la variable $z_{x,y}$ en la remplaçant par sa valeur (15) dans les équations du système (14), les équations restantes jouissent toujours des mêmes propriétés en ce qui concerne les signes et la somme de leurs coefficients. L'élimination de toutes les inconnues, moins une, pouvant ainsi s'effectuer par substitutions successives, la proposition énoncée devient évidente.

De cette propriété des coefficients il résulte encore que la valeur de $z_{x,y}$ est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs données $\zeta_{\xi,\eta}$.

Par conséquent, si les nœuds (ξ, η) n'embrassent pas la totalité des nœuds de la frontière du domaine (D), ce sera toujours néanmoins, sur l'ensemble des nœuds (ξ, η), qu'on trouvera le maximum et le minimum de $z_{x,y}$.

La forme limite du résultat précédent, pour les réseaux de densité indéfiniment croissante, consiste dans le fait qu'*une fonction u, harmonique dans un domaine* (D), *ne peut atteindre son maximum ou son minimum dans les régions de la frontière où la dérivée normale* $\frac{du}{dn}$ *serait constamment nulle.*

Lorsqu'on emploie la forme (12) pour certains termes de la dérivée, les termes correspondants de la formule (16) sont remplacés par des intégrales définies. Cependant les propriétés essentielles subsistent, pourvu qu'on remplace les valeurs ζ données à la frontière par des valeurs qui en diffèrent très peu dans les réseaux très denses

$$\zeta' = \zeta - r\frac{d\zeta}{ds}\cos V.$$

On reconnaît d'ailleurs, à cause des propriétés des coefficients α, que si l'on remplace les ζ par des valeurs approchées à moins de ε, les valeurs des inconnues $z_{x,y}$ qu'on en déduit sont elles-mêmes approchées à moins de ε.

9. *La solution trouvée donne bien le minimum.* — La solution trouvée donne bien le minimum de l'intégrale de Dirichlet pour toutes les surfaces polyédrales projetées suivant le réseau considéré et ayant les mêmes sommets aux nœuds (ξ, η).

Donnons en effet, à chaque variable $z_{x,y}$, un accroissement $z'_{x,y}$; on a

$$F(z+z') = F(z) + \sum z' \frac{\partial F}{\partial z} + F(z').$$

Dans la somme

$$\sum z' \frac{\partial F}{\partial z},$$

les termes relatifs aux nœuds de l'ensemble (ξ, η) sont nuls, puisque nous supposons en ces points $z'_{\xi,\eta} = 0$; les termes relatifs aux autres nœuds sont également nuls, en vertu de l'équation (13). La forme $F(z')$ n'est nulle que si tous les z' sont égaux, et comme ils sont nuls sur l'ensemble (ξ, η), il en résulte que cette forme a une valeur essentiellement positive, à moins qu'on n'ait en tous les nœuds

$$z'_{x,y} = 0.$$

Si cette condition n'est pas réalisée, on a donc nécessairement

$$F(z+z') > F(z).$$

Pour une fonction $u(x, y)$ admettant des dérivées partielles continues, l'intégrale de Dirichlet est la limite de l'intégrale analogue relative à une surface polyédrale. Par conséquent, s'il existe une pareille fonction pour laquelle l'intégrale de Dirichlet atteint effectivement son minimum, la différence entre ce minimum et la fonction $F(z)$ tend vers zéro quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau et que, pour chaque réseau, on détermine les valeurs des z par les équations (13).

10. *La forme polaire et les formules de Green.* — Les formules de Green peuvent se rattacher à la considération de la forme polaire de la forme quadratique $F(z)$. Soient $z_{x,y}$, $t_{x,y}$ deux systèmes de variables correspondant aux nœuds du même réseau; $u(x, y)$ et

$v(x, y)$ les deux fonctions associées. Considérons la forme polaire

$$F(z, t) = \frac{1}{2}\sum t\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\sum z\frac{\partial F}{\partial t}.$$

En y remplaçant les dérivées par leurs formes limites, y compris les termes à la frontière, nous avons les formules suivantes, où S désigne l'aire du domaine et (C) le contour frontière.

$$\begin{aligned}\lim F(z, t) &= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy \\ &= -\iint_{(S)} v\,\Delta u\,dx\,dy - \int_{(C)} v\frac{\partial u}{\partial n}\,ds \\ &= -\iint_{(S)} u\,\Delta v\,dx\,dy - \int_{(C)} u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds;\end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{(S)} (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy + \int \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) ds = 0.$$

La formule d'Euler pour les fonctions homogènes quadratiques,

$$F(z) = \frac{1}{2}\sum z\frac{\partial F}{\partial z},$$

se traduit par l'identité

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\iint_{(S)} u\,\Delta u\,dx\,dy - \int_{(C)} u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds.$$

Le rôle des fonctions de Green dans le calcul des fonctions harmoniques s'explique si l'on remarque que la forme polaire

$$\frac{1}{2}\sum t\frac{\partial F}{\partial z}$$

est une combinaison linéaire des premiers membres des équations (13). Si l'on veut, par exemple, résoudre ces équations dans l'hypothèse examinée précédemment, où l'on donne les valeurs des inconnues $z_{x,y}$ pour un ensemble de points (ξ, η), on supposera qu'on ait

$$t_{\xi,\eta} = 0,$$

de manière à n'introduire dans la forme polaire que celles des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial z_{x,y}}$ qui forment les premiers membres des équations (13).

On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\sum z \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Il reste à déterminer les valeurs restantes des variables t, de manière à éliminer toutes les inconnues z, sauf celle que l'on veut calculer, soit par exemple z_{x_0,y_0}. Pour cela, il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial t_{x,y}} = 0,$$

pour tous les nœuds (x, y), sauf pour le nœud (x_0, y_0). En ce dernier nœud, on pourra supposer

$$\frac{\partial F}{\partial t_{x_0 y_0}} = 1.$$

On reconnaît facilement sous cette forme les conditions ordinaires qui déterminent la fonction de Green pour le problème que nous considérons.

La considération de la forme polaire fournit aussi la relation identique qui existe entre les formes linéaires dérivées $\frac{\partial F}{\partial z}$. La forme quadratique $F(t)$ s'annule identiquement, ainsi que toutes ses dérivées partielles du premier ordre, quand on donne aux variables t la même valeur, par exemple

$$t = 1.$$

On déduit de cette remarque, à cause de la réciprocité des formes polaires,

$$\sum \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

CHAPITRE II.

ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES DES RÉSEAUX RECTANGULAIRES RÉGULIERS.

11. Nous allons maintenant étudier spécialement le cas des réseaux formés comme nous l'avons indiqué, à l'aide de rectangles égaux ayant leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées.

D'après la formule (10), les équations linéaires à résoudre se ramènent à la forme

$$(18) \qquad \frac{1}{h^2}(2z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y}) + \frac{1}{k^2}(2z_{x,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k}) = 0.$$

Pour $h = k$, l'équation se simplifie encore et devient

$$(19) \qquad 4z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k} = 0.$$

En écrivant les équations de cette forme pour chaque nœud (x, y), on forme un système d'équations linéaires dont nous avons étudié plus haut les propriétés générales. Mais on peut aussi envisager chacune de ces équations comme une équation aux différences finies et chercher à la résoudre pour toutes les valeurs réelles des variables x et y. Nous déterminerons ainsi des fonctions dont les valeurs sur les nœuds du réseau vérifieront les équations linéaires considérées; nous leur donnerons le nom de *fonctions d'interpolation*.

12. Nous commencerons par calculer des solutions simples de l'équation aux différences (18).

Posons

$$(20) \qquad z_{x,y} = u^{\frac{x}{h}} v^{\frac{y}{k}},$$

u et v étant des constantes.

En écrivant que cette expression vérifie l'équation (18), on trouve entre u et v la relation

$$(21) \qquad \frac{1}{h^2}\left(2 - u - \frac{1}{u}\right) + \frac{1}{k^2}\left(2 - v - \frac{1}{v}\right) = 0.$$

Soient

$$u = u'^2, \qquad v = v'^2,$$

la relation (21) devient

$$(22) \qquad \frac{\left(u' - \frac{1}{u'}\right)^2}{h^2} + \frac{\left(v' - \frac{1}{v'}\right)^2}{k^2} = 0.$$

Nous poserons donc

$$u' - \frac{1}{u'} = th, \qquad v' - \frac{1}{v'} = t'k;$$

d'où

$$u' = \sqrt{1+t^2h^2} + th, \qquad v' = \sqrt{1+t'^2k^2} + t'k.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (22), on a

$$(23) \qquad t^2 + t'^2 = 0.$$

Nous prenons

$$t' = ti \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

ce qui nous donne les expressions de u et de v sous la forme simple

$$u = (\sqrt{1+t^2h^2} + th)^2,$$
$$v = (\sqrt{1-t^2k^2} + itk)^2.$$

De là nous tirons enfin l'expression de $z_{x,y}$

$$(24) \qquad z_{x,y} = (\sqrt{1+t^2h^2} + th)^{\frac{2x}{h}} (\sqrt{1-t^2k^2} + itk)^{\frac{2y}{k}}.$$

Le paramètre t peut prendre des valeurs réelles ou imaginaires. Toute combinaison linéaire d'expressions de la forme (24) est une nouvelle solution de l'équation (18). Telle serait l'intégrale

$$\int f(t) (\sqrt{1+t^2}h^2 + th)^{\frac{2x}{h}} (\sqrt{1-t^2}k^2 + itk)^{\frac{2y}{k}} dt,$$

dans laquelle la fonction $f(t)$, ainsi que le domaine d'intégration, sont arbitraires.

15. *Polynomes satisfaisant à l'équation aux différences.* — Parmi les diverses intégrales qu'on peut déduire ainsi de la formule (24) je signalerai les polynomes à cause de leur forme intéressante, bien que je n'aie pas à en faire l'application dans la suite de ce travail.

Posons, en désignant par p un nombre entier positif,

$$(25) \qquad \begin{cases} j_{2p}(x, h) = x^2(x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-(\overline{p-1})^2h^2), \\ j_{2p+1}(x, h) = x\ (x^2-h^2)(x^2-4h^2)\ldots(x^2-p^2h^2). \end{cases}$$

Ces expressions satisfont à la formule de récurrence

$$(26) \quad j_n(x+h, h) + j_n(x-h, h) - 2j_n(x, h) = n(n-1)h^2 j_{n-2}(x, h).$$

Les polynomes

$$(27)\qquad \begin{cases} P_n(x,y,h,k) = n!\sum(-1)^p \dfrac{j_{n-2p}(x,h)}{(n-2p)!}\,\dfrac{j_{2p}(y,k)}{2p!}, \\[2ex] Q_n(x,y,h,k) = n!\sum(-1)^p \dfrac{j_{n-2p-1}(x,h)}{(2n-2p-1)!}\,\dfrac{j_{2p+1}(y,k)}{(2p+1)!} \end{cases}$$

sont des solutions de l'équation aux différences (18), qui tendent vers des polynomes harmoniques homogènes lorsque h et k tendent vers zéro. Si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

on trouve

$$\lim P_n = r^n \cos n\theta,$$
$$\lim Q_n = r^n \sin n\theta.$$

On peut d'ailleurs démontrer facilement que tout polynome vérifiant l'équation aux différences (18) est une combinaison linéaire de polynomes P_n et Q_n.

14. *Transformation de l'exponentielle.* — Nous transformerons la solution fondamentale définie par la formule (24), de manière à lui donner une forme plus commode pour le calcul. Posons

$$(28)\qquad tk = \sin\frac{\theta k}{2},$$

$$(29)\qquad \theta' = \frac{2}{h}\log\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{k^2}\sin^2\frac{\theta k}{2}} + \frac{h}{k}\sin\frac{\theta k}{2}\right).$$

L'expression de $z_{x.y}$ devient

$$(30)\qquad z_{x.y} = \left(\sqrt{1+t^2h^2}+th\right)^{\frac{2x}{h}}\left(\sqrt{1-t^2k^2}+itk\right)^{\frac{2y}{k}} = e^{\theta' x + i\theta y}.$$

Le changement de signe de t ou de i donne les diverses exponentielles représentées par l'expression

$$e^{\pm\theta' x \pm i\theta y},$$

dont on déduit ensuite, par des combinaisons linéaires, les intégrales élémentaires de la forme

$$\operatorname{ch}\theta' x\cos\theta y, \quad \operatorname{ch}\theta' x\sin\theta y,$$
$$\operatorname{sh}\theta' x\cos\theta y, \quad \operatorname{sh}\theta' x\sin\theta y.$$

Les symboles ch, sh désignent le cosinus et le sinus hyperboliques.

En changeant t en ti, on obtient évidemment d'autres intégrales semblables, dans lesquelles les fonctions circulaires et hyperboliques sont simplement permutées.

13. *Relation entre θ et θ'.* — L'examen de la relation qui existe entre θ et θ' est important pour l'étude de la convergence. Nous supposons ici que l'on considère seulement les valeurs positives de ces deux paramètres.

Le développement en série du second membre de la formule (29) donnerait

$$\theta' = \frac{2}{h}\left(\frac{h}{k}\sin\frac{\theta k}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{h^3}{k^3}\sin^3\frac{\theta k}{2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5}\,\frac{h^5}{k^5}\sin^5\frac{\theta k}{2} + \ldots\right).$$

Donc, si θ est constant et que $\frac{h}{k}$ reste fini et différent de zéro, lorsque k tend vers zéro, θ' tend vers θ.

L'exponentielle limite $e^{\theta x + i\theta y}$ est une fonction de $x + iy$. La partie réelle et le coefficient de i, dans cette fonction, sont par conséquent des fonctions harmoniques.

Le paramètre θ' tend vers sa limite en croissant. On peut vérifier cette propriété par le calcul suivant :

Posons

$$\frac{h}{k} = a, \qquad k = \frac{2}{x}, \qquad \theta' = \frac{x}{a}\log\left(\sqrt{1 + a^2\sin^2\frac{\theta}{x}} + a\sin\frac{\theta}{x}\right).$$

Nous avons

$$\frac{d\theta'}{dx} = \frac{1}{a}\log\left(\sqrt{1 + a^2\sin^2\frac{\theta}{x}} + a\sin\frac{\theta}{x}\right) - \frac{\frac{\theta}{x}\cos\frac{\theta}{x}}{\sqrt{1 + a^2\sin^2\frac{\theta}{x}}},$$

$$\frac{d^2\theta'}{dx^2} = -\frac{\frac{\theta^3}{x^3}(1 + a^2)\sin\frac{\theta}{x}}{\left(1 + a^2\sin^2\frac{\theta}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque x croît à partir de la valeur $\frac{2\theta}{\pi}$, la dérivée seconde est

constamment négative. La dérivée première est positive et tend vers zéro. Donc θ' croît constamment dans les conditions indiquées.

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES POUR LE CAS DU RECTANGLE.

16. A l'aide des fonctions simples que nous venons de déterminer, il est possible de résoudre l'équation aux différences

$$(18)\qquad \frac{1}{h^2}(2z_{x,y}-z_{x-h,y}-z_{x+h,y})+\frac{1}{k^2}(2z_{x,y}-z_{x,y-k}-z_{x,y+k})=0,$$

de façon que z prenne des valeurs données sur les nœuds du périmètre d'un rectangle (D) dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. On calculera une *fonction d'interpolation* $f(x,y)$ définie dans tout le domaine et qui devra se réduire à $z_{x,y}$ sur les nœuds du réseau.

Nous supposons qu'on prenne le centre du rectangle pour origine. Soient $2a$ et $2b$ les longueurs des côtés parallèles respectivement à Ox et Oy. Pour former le réseau, on partagera chacun des côtés en $2n$ parties égales, de sorte qu'on devra faire dans nos formules

$$h=\frac{a}{n},\qquad k=\frac{b}{n}.$$

Les coordonnées ξ, η des nœuds situés à la frontière seront de la forme suivante, où p désigne un entier quelconque au plus égal à n :

1° Sur les côtés parallèles à Oy,

$$\xi=\pm a,\qquad \eta=\pm pk=\pm\frac{pb}{n};$$

2° Sur les côtés parallèles à Ox,

$$\eta=\pm b,\qquad \xi=\pm ph=\pm\frac{pa}{n}.$$

En chacun de ces nœuds on suppose donnée la valeur de z ; nous la désignerons par $\zeta(\xi,\eta)$. Les valeurs données aux angles du rectangle n'interviennent pas dans les équations (18) pour la détermination des valeurs des $z_{x,y}$ sur les nœuds intérieurs. On peut donc sans inconvé-

nient les supposer égales à zéro, puisque nous ne nous astreignons, d'autre part, à aucune condition de continuité.

17. Par suite de considérations évidentes, on est conduit à chercher la représentation de la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions simples signalées au Chapitre précédent et qui s'expriment par le produit d'une fonction hyperbolique et d'une fonction circulaire.

Pour que l'exponentielle $e^{\mu\frac{x}{a}+i\frac{\alpha y}{b}}$ satisfasse à l'équation aux différences (18), on doit avoir, d'après l'équation (29),

$$\mu = \frac{2a}{h}\log\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{k^2}\sin^2\frac{\alpha k}{2b}}+\frac{h}{k}\sin\frac{\alpha k}{2b}\right);$$

et, comme on a

$$h = \frac{a}{n}, \qquad k = \frac{b}{n},$$

cette relation devient

$$\mu = 2n\log\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\frac{\alpha}{2n}}+\frac{a}{b}\sin\frac{\alpha}{2n}\right). \tag{31}$$

D'après cela, posons

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & \sum_{r=0}^{r=n-1}\left(A_r\frac{\operatorname{ch}\mu_r\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\mu_r}+B_r\frac{\operatorname{sh}\mu_r\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\mu_r}\right)\cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b} \\ & +\sum_{r=1}^{r=n-1}\left(A'_r\frac{\operatorname{ch}\mu'_r\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\mu'_r}+B'_r\frac{\operatorname{sh}\mu'_r\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\mu'_r}\right)\sin\frac{r\pi y}{b} \\ & +\sum_{r=0}^{r=n-1}\left(C_r\frac{\operatorname{ch}\nu_r\frac{y}{b}}{\operatorname{ch}\nu_r}+D_r\frac{\operatorname{sh}\nu_r\frac{y}{b}}{\operatorname{sh}\nu_r}\right)\cos\frac{(2r+1)\pi x}{2a} \\ & +\sum_{r=1}^{r=n-1}\left(C'_r\frac{\operatorname{ch}\nu'_r\frac{y}{b}}{\operatorname{ch}\nu'_r}+D'_r\frac{\operatorname{sh}\nu'_r\frac{y}{b}}{\operatorname{sh}\nu'_r}\right)\sin\frac{r\pi x}{a} \quad (^1). \end{aligned} \tag{32}$$

---

(1) Dans la formule (32), les termes en sinus et en cosinus peuvent se ramener à un même type en vertu des relations

$$\sin\frac{2r\pi y}{2b} = (-1)^r\sin\frac{2r\pi(y+b)}{2b},$$

$$\cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b} = (-1)^r\sin\frac{(2r+1)\pi(y+b)}{2b}.$$

Les multiplicateurs μ_r, μ'_r se déduisent de la formule (31) en y remplaçant α successivement par $\frac{(2r+1)\pi}{2}$ et $r\pi$; les multiplicateurs ν_r et ν'_r se calculent de la même façon, mais en permutant a et b.

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients A_r, B_r, ... par la condition que la fonction $f(x, y)$ prenne sur les nœuds de la frontière les valeurs données $\zeta(\xi, \eta)$, sauf aux angles du rectangle, où la fonction considérée s'annule identiquement. Nous nous trouvons amenés à un problème d'interpolation trigonométrique qu'on peut résoudre par les méthodes ordinaires. Pour $x = \pm a$, les termes de la seconde ligne disparaissent et l'on doit avoir, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\zeta(a, \eta) &= \sum_{r=0}^{r=n-1} (A_r + B_r) \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum_{r=1}^{r=n-1} (A'_r + B'_r) \sin\frac{r\pi\eta}{b}, \\
\zeta(-a, \eta) &= \sum_{r=0}^{r=n-1} (A_r - B_r) \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum_{r=1}^{r=n-1} (A'_r - B'_r) \sin\frac{r\pi\eta}{b}.
\end{aligned}$$

On en tire

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}
A_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) + \zeta(-a, \eta)}{2} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}, \\
B_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) - \zeta(-a, \eta)}{2} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}, \\
A'_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) + \zeta(-a, \eta)}{2} \sin\frac{r\pi\eta}{b}, \\
B'_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) - \zeta(-a, \eta)}{2} \sin\frac{r\pi\eta}{b}.
\end{aligned}\right.$$

Les autres coefficients C_r, D_r, C'_r, D'_r, se calculeraient évidemment par des formules semblables.

18. Nous avons trouvé une *fonction d'interpolation* $f(x, y)$

définie dans tout le plan. Il reste à démontrer qu'elle prend en tous les nœuds du réseau situés à l'intérieur du rectangle les valeurs des inconnues $z_{x,y}$.

Nous avons vu que, si l'on écrit les équations de la forme (18) en y remplaçant les variables x et y successivement par les coordonnées de tous les nœuds considérés du réseau, on obtient un système d'équations linéaires dont la solution est unique quand on suppose données les valeurs $\zeta(\xi, \eta)$ aux nœuds de la frontière. Or, la *fonction d'interpolation* satisfait à toutes ces conditions. La valeur qu'elle prend en chaque nœud (x, y) est donc égale à $z_{x,y}$.

19. On peut faire immédiatement une remarque importante qui résulte du simple examen des formules (33). Si le module de la fonction $\zeta(\xi, \eta)$ reste constamment inférieur à M, chaque coefficient A_r, B_r, ... a un module inférieur à $2M$. En effet, chaque somme Σ dans ces formules comprend $2n-1$ ou $2n-2$ termes et chacun d'eux est au plus égal à M. On a donc

$$A_r < \frac{(2n-1)M}{n} < 2M, \qquad \dots$$

20. *Expression de l'intégrale en fonction linéaire des données.* — La fonction d'interpolation $f(x, y)$ est une fonction linéaire des données $\zeta(\xi, \eta)$, dont il est facile d'avoir l'expression en remplaçant dans la formule (32) les coefficients A_r, B_r, ... par leurs valeurs (33). Le coefficient de $\zeta(a, \eta)$ dans le développement est égal à

$$\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\left(\frac{\operatorname{ch}\mu_r\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\mu_r}+\frac{\operatorname{sh}\mu_r\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\mu_r}\right)\cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}\cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b}$$
$$+\frac{1}{2n}\sum_{r=0}^{r=n-1}\left(\frac{\operatorname{ch}\mu'_r\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\mu'_r}+\frac{\operatorname{sh}\mu'_r\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\mu'_r}\right)\sin\frac{r\pi\eta}{2b}\sin\frac{r\pi y}{2b}.$$

On peut résumer tous les coefficients dans une même formule en

introduisant la fonction

$$(34)\quad P(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{b}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh}\mu_r\left(\frac{x+\xi}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\xi}{a}} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{b} \cos\frac{(2r+1)\pi y}{b}$$

$$+ \frac{1}{b}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh}\mu'_r\left(\frac{x+\xi}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\mu_r \frac{\xi}{a}} \sin\frac{r\pi\eta}{b} \sin\frac{r\pi y}{b}$$

$$+ \frac{1}{a}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh}\nu_r\left(\frac{y+\eta}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\nu_r \frac{y}{b}} \cos\frac{(2r+1)\pi\xi}{a} \cos\frac{(2r+1)\pi x}{a}$$

$$+ \frac{1}{a}\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh}\nu'_r\left(\frac{y+\eta}{b}\right)}{\operatorname{sh} 2\nu'_r \frac{\eta}{b}} \sin\frac{r\pi\xi}{a} \sin\frac{r\pi x}{a}.$$

L'expression de P se réduit aux termes qui figurent dans les deux premières lignes pour $\xi = \pm a$, et à ceux des deux dernières lignes pour $\eta = \pm b$. Soit Δs un élément de longueur du périmètre du rectangle ; on prendra $\Delta s = k$ sur les côtés parallèles à Oy et $\Delta s = h$ sur les côtés parallèles à Ox, de sorte qu'on aura, suivant le côté considéré,

$$\frac{\Delta s}{b} = \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta s}{a} = \frac{1}{n}.$$

Avec ces notations, l'expression de la fonction d'interpolation prend la forme suivante, analogue à la formule de Poisson,

$$(35)\qquad f(x, y) = \Sigma\zeta(\xi, \eta)\, P(x, y, \xi, \eta)\, \Delta s.$$

Nous avons donc obtenu pour le cas du rectangle l'expression linéaire dont nous avions donné au n° **7** la forme générale. Les coefficients α de l'équation (16) sont ici égaux à $P(x, y, \xi, \eta)\,\Delta s$.

21. *Valeur de la fonction* P *sur le périmètre du rectangle.* — On obtient une vérification simple des résultats obtenus, en calculant la

valeur que prend le coefficient $P(x, y, \xi, \eta)\Delta s$ lorsque le point (x, y) coïncide avec un nœud de la frontière. Il suffira de faire le calcul pour le cas où l'on a $\xi = a$. Le point (x, y) peut se trouver alors sur le côté $x = a$ ou sur l'un quelconque des trois autres côtés ; si l'on a $y = \pm b$ ou $x = -a$, en même temps que $\xi = a$, la fonction $P(x, y, \xi, \eta)$ est identiquement nulle. Il ne reste à examiner que l'hypothèse $\xi = a$, $x = a$. La valeur de $P\Delta s$ se présente alors sous la forme

$$(36)\quad \begin{aligned} P\,\Delta s &= \frac{1}{n}\Sigma\cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b}\cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \frac{1}{n}\Sigma\sin\frac{r\pi y}{b}\sin\frac{r\pi\eta}{b} \\ &= \frac{1}{2n}\Sigma\left[\cos\frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2b} + \cos\frac{(2r+1)\pi(y-\eta)}{2b}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2n}\Sigma\left[\cos\frac{2r\pi(y-\eta)}{2b} - \cos\frac{2r\pi(y+\eta)}{2b}\right]. \end{aligned}$$

Nous transformons cette dernière expression en faisant usage des deux identités

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n-1)a = \frac{\sin 2na}{2\sin a},$$

$$\frac{1}{2} + \cos 2a + \cos 4a + \ldots + \cos(2n-2)a = \frac{\sin(2n-1)a}{2\sin a}.$$

Nous trouvons ainsi, en supposant $(y+\eta)(y-\eta) \neq 0$,

$$(37)\quad P\,\Delta s = \frac{1}{4n}\left[\frac{\sin\dfrac{2n\pi(y-\eta)}{2b} + \sin\dfrac{(2n-1)\pi(y+\eta)}{2\beta}}{\sin\dfrac{\pi(y-\eta)}{2b}} + \frac{\sin\dfrac{2n\pi(y+\eta)}{2b} + \sin\dfrac{(2n-1)\pi(y+\eta)}{2b}}{\sin\dfrac{\pi(y+\eta)}{2b}}\right].$$

Les valeurs de y et de η sont de la forme

$$y = mk, \qquad \eta = m'k,$$

m et m' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et l'on a, d'autre part,

$$b = nk.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule précédente donne

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,\Delta s &= \frac{1}{4n}\left\{\frac{\sin\left[(m-m')\pi - \dfrac{(m-m')\pi}{2n}\right]}{\sin\dfrac{(m-m')\pi}{2n}} - \frac{\sin\left[(m+m')\pi - \dfrac{(m+m')\pi}{2n}\right]}{\sin\dfrac{(m+m')\pi}{2n}}\right\} \\ &= \frac{1}{4n}\left[(-1)^{m-m'-1} - (-1)^{m+m'-1}\right] = 0. \end{aligned}$$

Il reste à examiner les cas exclus

$$y+\eta=0 \qquad \text{et} \qquad y-\eta=0.$$

Le calcul direct à l'aide de la formule (36) ou le passage à la limite à l'aide de la formule (37) donne :

1° Pour $\eta+y=0$,

$$\mathrm{P}=0;$$

2° Pour $y=\eta$,

$$\mathrm{P}\,\Delta s = 1.$$

En résumé, le coefficient $\mathrm{P}(x, y, \eta, \xi)\,\Delta s$ s'annule lorsque le nœud (x, y) se trouve sur la frontière, à moins qu'il ne coïncide avec le nœud (ξ, η), auquel cas on a

$$\mathrm{P}(\xi, \eta, \xi, \eta)\,\Delta s = 1.$$

D'après ce calcul, il est clair que la fonction d'interpolation $f(x, y)$ définie par la formule (35) est égale à $\zeta(\xi, \eta)$ aux nœuds de la frontière.

CHAPITRE IV.

FORME LIMITE DE LA SOLUTION.

22. *Convergence du développement.* — Il reste à étudier la manière dont se comporte la fonction d'interpolation $f(x, y)$ pour les réseaux de densité indéfiniment croissante. Nous commencerons par établir la convergence du développement de cette fonction, donné par la formule (32). Considérons les termes de la forme

$$u_r = \mathrm{A}_r \frac{\operatorname{ch}\mu_r \dfrac{x}{a}}{\operatorname{ch}\mu_r} \cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b}.$$

Soit ρ un nombre positif plus petit que 1 ; supposons qu'on ait

$$\left|\frac{x}{a}\right| < \rho.$$

Comme le module de A_r est plus petit que $2M$ (nº **17**), celui de u_r sera moindre que

$$2M\frac{\operatorname{ch}\mu_r\rho}{\operatorname{ch}\mu_r} = 2M\frac{e^{\mu_r\rho}+e^{-\mu_r\rho}}{e^{\mu_r}+e^{-\mu_r}}.$$

Lorsque μ_r est positif et très grand, le rapport

$$\frac{e^{\mu_r\rho}+e^{-\mu_r\rho}}{e^{\mu_r}+e^{-\mu_r}}$$

diffère très peu de

$$\frac{e^{\mu_r\rho}}{e^{\mu_r}} = \frac{1}{e^{\mu_r(1-\rho)}}.$$

La valeur de μ_r est définie par l'équation (31) où l'on fait

$$\alpha = (2r+1)\frac{\pi}{2},$$

(38) $$\mu_r = 2n\log\left[\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\frac{(2r+1)\pi}{4n}} + \frac{a}{b}\sin\frac{(2r+1)\pi}{4n}\right].$$

Quand n croît à partir de $\frac{2r+1}{2}$, μ_r croît constamment et reste par conséquent compris entre ses deux limites :

(39) $$(2r+1)\log\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{b}\right) < \mu_r < \frac{a}{b}(2r+1)\frac{\pi}{2}.$$

Posons

(40) $$\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^{1-\rho} = \frac{1}{\lambda}.$$

Nous trouvons alors, d'après l'inégalité (39),

$$\frac{1}{e^{\mu_r(1-\rho)}} < \lambda^{2r+1},$$

d'où

$$|u_r| < 2M\lambda^{2r+1}.$$

Le nombre λ est positif et plus petit que *un*. La valeur absolue

de u_r est donc moindre que celle du terme correspondant d'une progression géométrique décroissante.

Il est intéressant de remarquer que la raison λ de cette progression ne dépend ni de n ni des valeurs de la fonction ζ à la frontière du rectangle.

Un calcul analogue au précédent s'appliquerait sans modification aux autres termes du développement. La raison λ est la même pour tous les termes des deux premières lignes. Pour ceux des deux dernières lignes, on supposera

$$\left|\frac{y}{b}\right| < \rho < 1,$$

et l'on trouvera, pour la raison λ' de la progression correspondante, l'expression

$$\frac{1}{\lambda'} = \left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^{1-\rho}. \tag{40'}$$

Désignons par $f_m(x, y)$ la fonction que l'on déduit de $f(x, y)$ en négligeant dans le développement (32) de cette fonction tous les termes dont l'indice est supérieur à m. D'après les résultats précédents, il est possible de prendre m assez grand pour que la somme des termes négligés soit plus petite que toute quantité positive donnée ε, et cela quel que soit n. Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

Étant donné un nombre positif arbitraire ε, il est possible de trouver un nombre m', tel que l'inégalité $m > m'$ entraîne uniformément

$$|f(x, y) - f_m(x, y)| < M\varepsilon \tag{41}$$

dans tout le rectangle D' *défini par les inégalités*

$$\left|\frac{x}{a}\right| \leq \rho \qquad \left|\frac{y}{b}\right| \leq \rho \qquad (\rho < 1).$$

Le nombre m' ne dépend ni de n, ni des valeurs données à la frontière, mais seulement de ρ, c'est-à-dire de la situation du contour du rectangle (D').

La convergence des dérivées pourrait se démontrer par un calcul semblable.

23. Le nombre m ayant été choisi de manière à satisfaire aux conditions précédentes, nous pourrons supposer n assez grand pour que chacun des coefficients μ_r, μ'_r, ... diffère de sa limite supérieure aussi peu qu'on le voudra pour toutes les valeurs de r inférieures à m. Le terme principal de la différence

$$\frac{a}{b}\frac{(2r+1)\pi}{2}-\mu_r$$

est égal à

$$\frac{1}{6}\frac{a}{b}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{(2r+1)^3\pi^3}{32n^2},$$

et le développement en série que nous avons indiqué montre que μ_r tend rapidement vers sa limite, lorsque r restant constant, n croît indéfiniment.

Soit $V_m(x, y)$ la fonction harmonique qu'on déduit de $f_m(x, y)$ en y remplaçant les paramètres μ_r, μ'_r, ν_r, ν'_r par leurs limites supérieures. Il est possible de déterminer un nombre n' tel que l'inégalité $n > n'$ entraîne *dans tout le rectangle* (D)

$$(42)\qquad |f_m(x, y)-V_m(x, y)| < M\varepsilon.$$

Le nombre n' ne dépend que de m; il est entièrement indépendant de la distribution des valeurs données à la frontière.

Le module de la différence

$$f(x, y)-V_m(x, y)$$

est inférieur à $2M\varepsilon$ dans tout le rectangle (D').

24. On obtient une autre fonction harmonique $V(x, y)$ qui prend sur la frontière les mêmes valeurs que la fonction d'interpolation $f(x, y)$ en effectuant sur le développement entier de cette fonction la substitution indiquée plus haut pour la fonction f_m : c'est-à-dire en remplaçant les paramètres μ_r, μ'_r, ν_r, ν'_r par leurs limites supérieures.

La différence $V(x, y)-V_m(x, y)$ est analogue à la différence $f(x, y)-f_m(x, y)$. Le développement de la fonction V est même plus rapidement convergent que celui de f. Par conséquent l'inégalité

$$(43)\qquad |V(x, y)-V_m(x, y)| < M\varepsilon$$

sera nécessairement réalisée dans les mêmes conditions qui entraînent l'inégalité (41).

De la comparaison des inégalités (41), (42), (43), on déduit immédiatement, pour tout le rectangle (D'),

$$(44) \qquad |f(x,y) - \mathrm{V}(x,y)| < 3\mathrm{M}\varepsilon.$$

Donc à chaque réseau considéré correspondent :

1° Un système de valeurs $z_{x,y}$ et une fonction d'interpolation $f(x,y)$ satisfaisant à l'équation aux différences (18);

2° Une fonction harmonique $\mathrm{V}(x,y)$.

Les fonctions $f(x,y)$ et $\mathrm{V}(x,y)$ sont égales sur le périmètre du rectangle et sont assujetties à prendre sur les nœuds de ce périmètre les mêmes valeurs qu'une fonction bornée quelconque $\zeta(\xi,\eta)$.

Quand la densité du réseau croît indéfiniment, la différence

$$f(x,y) - \mathrm{V}(x,y)$$

tend uniformément vers zéro dans tout rectangle (D') concentrique, homothétique et intérieur au rectangle (D).

25. Il y a une circonstance particulièrement intéressante à observer dans ce résultat, c'est que la continuité des valeurs données à la frontière n'y intervient pas. La fonction $\zeta(\xi,\eta)$ peut présenter des discontinuités quelconques, pourvu qu'elle reste bornée. En réalité, les fonctions f et V sont continues à la frontière; elles prennent les valeurs ζ seulement sur les nœuds. Néanmoins la discontinuité possible de la fonction ζ apparaît dans le fait que, l'intervalle de deux nœuds successifs devenant de plus en plus petit, il n'est pas nécessaire de supposer que l'oscillation correspondante de la fonction ζ tende vers zéro.

26. La fonction harmonique $\mathrm{V}(x,y)$ dépend du réseau considéré et ne tend pas en général vers une fonction limite déterminée quand la densité du réseau croît indéfiniment, du moins tant qu'on n'impose à la fonction donnée $\zeta(\xi,\eta)$ aucune autre condition. Mais si cette

fonction est intégrable, ou du moins sommable, au sens de M. Lebesgue, la limite existe.

Pour le démontrer, nous allons considérer d'abord la fonction $P(x, y, \xi, \eta)$ définie par la formule (34) et chercher comment elle se comporte quand on fait croître la densité du réseau. Notre raisonnement du n° **21** reste applicable. Supposons qu'on ait

$$\xi = a, \qquad \left|\frac{x}{a}\right| < \rho, \qquad \rho < 1.$$

Le rapport

$$\frac{\operatorname{sh} \mu_r \left(1 + \frac{x}{a}\right)}{\operatorname{sh} 2\mu_r} : e^{-\mu_r\left(1 - \frac{x}{a}\right)}$$

tend vers l'unité quand μ_r devient très grand. Le développement de la fonction P converge donc comme une progression géométrique dont la raison reste inférieure à la quantité λ définie par la formule (40).

On pourrait encore, avec une approximation plus grande, comparer le développement de la fonction P avec celui de la série

$$\begin{aligned}
&\sum \lambda^{2r+1} \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum \lambda^{2r} \sin \frac{r\pi y}{b} \sin \frac{r\pi\eta}{b} \\
&= \frac{1}{2} \sum \lambda^{2r+1} \left[\cos \frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2b} + \cos \frac{(2r+1)\pi(y-\eta)}{2b}\right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum \lambda^{2r} \left[\cos \frac{r\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{r\pi(y+\eta)}{b}\right].
\end{aligned}$$

La somme de cette série est égale à la partie réelle de l'expression

$$(45) \qquad Q(\lambda, y, \eta) = \left(\frac{\lambda e^{\frac{i\pi(y+\eta)}{2b}}}{1 + \lambda e^{\frac{i\pi(y+\eta)}{2b}}} + \frac{\lambda e^{\frac{i\pi(y-\eta)}{2b}}}{1 - \lambda e^{\frac{i\pi(y-\eta)}{2b}}}\right).$$

Nous pouvons donc déduire de ces résultats que, lorsqu'on fait croître n indéfiniment, le développement de la fonction P reste absolument convergent, quelle que soit la position du point (x, y) à l'intérieur du rectangle. La fonction représentée par le développement

limite est harmonique; nous la désignerons par $\Pi(x, y, \xi, \eta)$:

$$(46)\quad \Pi(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{b}\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{(2r+1)\pi(x+\xi)}{2b}}{\operatorname{sh}\frac{(2r+1)\pi\xi}{b}} \cos\frac{(2r+1)\pi y}{2b} \cos\frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}$$

$$+ \frac{1}{b}\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{r\pi(x+\xi)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{2r\pi\xi}{b}} \sin\frac{r\pi y}{b} \sin\frac{r\pi\eta}{b}$$

$$+ \frac{1}{a}\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2a}}{\operatorname{sh}\frac{(2r+1)\pi\eta}{a}} \cos\frac{(2r+1)\pi x}{2a} \cos\frac{(2r+1)\pi\xi}{a}$$

$$+ \frac{1}{a}\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\operatorname{sh}\frac{r\pi(y+\eta)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{2r\pi\eta}{a}} \sin\frac{r\pi x}{a} \sin\frac{r\pi\xi}{a}.$$

En répétant, à propos des fonctions P et Π, les raisonnements que nous avons faits au n° **22** pour les fonctions f et V, on démontre que P converge uniformément vers Π dans tout rectangle (D′) intérieur au rectangle (D), sans points communs à la frontière.

Si la fonction $\zeta(\xi, \eta)$ est intégrable, la somme finie

$$f(x,y) = \sum \zeta(\xi,\eta)\, P(x,y,\xi,\eta)\, \Delta s$$

tendra donc vers l'intégrale

$$(47)\qquad F(x,y) = \int \zeta(\xi,\eta)\, \Pi(x,y,\xi,\eta)\, ds,$$

évaluée suivant le périmètre du rectangle. Cette fonction $F(x, y)$ est la fonction harmonique limite.

27. *Représentation de la fonction* Π *par les fonctions elliptiques.* — Le développement en série (46) de la fonction Π n'est valable que dans le rectangle (D); mais on peut, par un calcul facile, le transformer de manière à obtenir une expression valable pour tout le plan. Supposons $\xi = a$, et écrivons le terme général du développement sous

la forme

$$U_r = \frac{1}{2b}\,\frac{e^{\frac{\pi(x+a)}{2b}} - e^{-\frac{r\pi(x+a)}{2b}}}{e^{\frac{r\pi a}{b}} - e^{-\frac{r\pi a}{b}}}\left[\cos\frac{r\pi(y-\eta)}{2b} + (-1)^{r-1}\cos\frac{r\pi(y+\eta)}{2b}\right].$$

Par analogie avec la théorie des fonctions elliptiques, nous posons

$$q^2 = e^{-\frac{2\pi a}{b}},$$

$$u = \frac{\pi[(x-a)+i(y-\eta)]}{2b}, \qquad v = \frac{\pi[(x-a)+i(y+\eta)]}{2b}.$$

U_r est la partie réelle de l'expression imaginaire

$$(48) \qquad V_r = \frac{1}{2b}\left[\frac{e^{ru} - q^{2r}e^{-ru}}{1-q^{2r}} + (-1)^{r-1}\frac{e^{rv} - q^{2r}e^{-rv}}{1-q^{2r}}\right].$$

Remplaçant la fraction $\frac{1}{1-q^{2r}}$ par son développement en série

$$\frac{1}{1-q^{2r}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{2rn},$$

et tenant compte des identités

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} e^{ru}q^{2rn} = \frac{q^{2n}e^u}{1-q^{2n}e^u},$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1}e^{rv}q^{2rn} = \frac{q^{2n}e^v}{1-q^{2n}e^v},$$

on trouve

$$(49) \quad 2b\sum V_r = \frac{e^u}{1-e^u} + \frac{q^2e^u}{1-q^2e^u} + \ldots + \frac{q^{2n}e^u}{1-q^{2n}e^u} + \ldots$$

$$- \left(\frac{q^2e^{-u}}{1-q^2e^{-u}} + \frac{q^4e^{-u}}{1-q^4e^{-u}} + \ldots + \frac{q^{2n}e^{-u}}{1-q^{2n}e^{-u}} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{e^v}{1+e^v} + \frac{q^2e^v}{1-q^2e^v} + \ldots + \frac{q^{2n}e^v}{1-q^{2n}e^v} + \ldots$$

$$- \left(\frac{q^2e^{-v}}{1+q^2e^{-v}} + \frac{q^4e^{-v}}{1+q^4e^{-v}} + \ldots + \frac{q^{2n}e^{-v}}{1+q^{2n}e^{-v}} + \ldots\right).$$

Considérons la fonction

$$W = \frac{(1+e^v)(1+q^2e^v)(1+q^4e^v)\dots(1+q^2e^{-v})(1+q^4e^{-v})\dots}{(1-e^u)(1-q^2e^u)(1-q^4e^u)\dots(1-q^2e^{-u})(1-q^4e^{-u})\dots}.$$

On a

$$(50) \qquad \sum V_r = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\log W.$$

Or, la fonction W est une fonction doublement périodique de deuxième espèce qui se présente sous la forme du rapport de deux fonctions H (¹), à un facteur près :

$$(51) \qquad W = \frac{e^{\frac{\pi[(x-a)+i(y+\eta-2b)]}{4b}} \mathrm{H}[-i(x-a)+y+\eta-2b]}{e^{\frac{\pi(x-a)+i(y-\eta)}{4b}} \mathrm{H}[-i(x-a)+(y-\eta)]}$$

$$= -ie^{\frac{\pi i\eta}{2b}}\frac{\mathrm{H}[-i(x-a)+(y+\eta-2b)]}{\mathrm{H}[-i(x-a)+(y-\eta)]}.$$

Considérée comme fonction de la variable $y - ix = -i(x+iy)$, W admet la période $4b$. Quand on change x en $x+4a$ ou $y-ix$ en $y-ix-4ai$, la fonction se reproduit, multipliée par la constante $e^{\frac{\pi i\eta}{b}}$. La dérivée logarithmique $\frac{d}{dx}\log W$ est donc une fonction elliptique de $y-ix$, admettant les deux périodes $4b$ et $4ai$; quand on la regarde comme fonction de $x+iy$, les périodes sont évidemment $4a$ et $4bi$.

Suivant une notation due à Weierstrass, représentons par $\mathcal{R}f(z)$ la partie réelle de la fonction $f(z)$. Nous avons alors

$$(52) \qquad \Pi(x,y,a,\eta) = \frac{1}{\pi}\mathcal{R}\frac{d}{dx}\log W.$$

28. La fonction Π est ainsi définie pour un côté du rectangle. On en déduirait évidemment une expression analogue pour chacun des autres côtés. Mais on peut aussi, par une transformation simple, obtenir une expression analytique qui représente la fonction Π pour les quatre côtés.

(¹) *Voir* Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 110.

Au lieu de la fonction W, considérons la fonction de quatre variables x, y, ξ, η

$$W' = \frac{H[-i(x-\xi)+y+\eta-2b]}{H[-i(x-\xi)+(y-\eta)]}.$$

Pour $\xi = a$, W′ ne diffère de W que par un facteur constant qui est sans influence sur la dérivée logarithmique, et l'on a d'abord

$$\Pi(x, y, a, \eta) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{R}\left(\frac{\partial \log W'}{\partial \xi}\right)_{\xi=a}.$$

Pour $\xi = -a$, on aurait de même,

$$\Pi(x, y, -a, \eta) = +\frac{1}{\pi}\mathcal{R}\left(\frac{\partial \log W'}{\partial \xi}\right)_{\xi=-a}.$$

En désignant par $\frac{d}{dn}$ la dérivée relative à un déplacement du point (ξ, η) dans le sens de la normale intérieure au rectangle, les deux résultats précédents se résument dans la formule

$$\Pi(x, y, \pm a, \eta) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn}\mathcal{R}\log W'.$$

Par une simple permutation de variables, on déduit de la fonction W une autre fonction analogue W″, à l'aide de laquelle on représenterait la fonction Π pour les deux côtés parallèles à Ox. Si l'on remarque maintenant que W′ et W″ se réduisent identiquement à l'unité, la première pour $\eta = \pm b$, et la seconde pour $x = \pm a$, on peut écrire pour tout le contour du rectangle

$$\Pi(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dn}\mathcal{R}\log W W'.$$

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette fonction, ni sur les transformations dont elle est susceptible, ni même sur le calcul très simple qui permet d'en déduire la fonction de Green. Tous ces développements analytiques ne présenteraient rien d'essentiellement nouveau et ne se rattacheraient plus que d'une façon très indirecte au développement de la méthode qui constitue l'objet de ce Mémoire. Mais il m'a semblé intéressant de retrouver directement, par l'application de cette méthode, les résultats qu'on déduit ordinairement de la théorie de la représentation conforme.

29. Je dois signaler cependant la forme de la fonction H au voisinage de la frontière. Pour $x = \alpha$, $y = \eta$ le premier terme du développement (49) devient infini ; les termes suivants représentent une fonction continue dans le voisinage de ce point. La partie réelle du rapport $\frac{e^u}{1 - e^u}$ est égal à

$$\frac{e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}} \cos\pi\left(\frac{y-\eta}{2b}\right) - e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}{1 - 2e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}} \cos\pi\left(\frac{y-\eta}{2b}\right) + e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}$$

$$= -1 + \frac{1 - e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}{1 - 2e^{\frac{\pi(r-a)}{2b}} \cos\pi\left(\frac{y-\eta}{2b}\right) + e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}.$$

Il suffirait de remplacer dans le dernier rapport l'exponentielle $e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}}$ par r et $\frac{\pi(y-\eta)}{2b}$ par $\varphi - \psi$ pour retrouver la fonction qui figure dans l'intégrale de Poisson [1]. La discussion classique de l'intégrale de Poisson pour le cercle s'applique donc sans modification à l'intégrale analogue relative au rectangle.

CHAPITRE V.

CAS D'UN DOMAINE QUELCONQUE.

30. Dans le cas d'un domaine quelconque on peut encore employer un réseau rectangulaire régulier, complété dans le voisinage de la frontière par des intégrales de forme appropriée que nous supposerons sans angles obtus. Les équations linéaires à résoudre conservent toujours la forme (18), sauf pour les termes relatifs aux triangles contigus à la frontière. Il reste à examiner comment se comporte la solution de ce système quand la densité du réseau croît indéfiniment.

Imaginons un rectangle (R) limité par des lignes du réseau, et par

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I.

conséquent intérieur au domaine considéré. Si l'on a calculé les valeurs des inconnes $z_{x,y}$ qui correspondent aux nœuds situés sur le périmètre du rectangle (R), le calcul des inconnues relatives aux nœuds intérieurs se ramène au problème étudié dans les Chapitres précédents. Il est donc possible de prendre la densité du réseau assez grande pour que les valeurs des inconnues $z_{x,y}$ diffèrent aussi peu qu'on le voudra des valeurs correspondantes d'une fonction harmonique, dans tout le rectangle (R).

La fonction d'interpolation $f(x, y)$ qui prend sur les nœuds intérieurs du rectangle les valeurs des inconnues $z_{x,y}$ admet des dérivées jusqu'à un ordre quelconque, et comme les dérivées secondes tendent uniformément vers les dérivées d'une fonction harmonique, l'expression

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

tend uniformément vers zéro à l'intérieur du rectangle quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau.

Cette propriété s'étend évidemment à tout point ou à toute région du domaine qu'on peut entourer d'un rectangle à côtés parallèles aux axes et situé tout entier dans le domaine. Donc, les fonctions limites, si elles existent, sont nécessairement harmoniques dans le domaine considéré.

Si la fonction donnée à la frontière est partout discontinue, il est évident qu'il n'existe pas, en général, une fonction limite unique, indépendante des réseaux. Toutefois les valeurs des quantités $z_{x,y}$ étant partout bornées, et représentées par les valeurs de fonctions harmoniques avec une approximation indéfiniment croissante, il sera possible de choisir dans l'ensemble des réseaux considérés des ensembles particuliers pour chacun desquels il existera une fonction limite, qui sera nécessairement harmonique. On peut, en effet, appliquer à ces fonctions le procédé de raisonnement dû à *Ascoli* et utilisé par Hilbert (¹) et par M. Lebesgue (²).

(¹) HILBERT, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip* (§ 3) (*Math. Annalen*, Bd 59, p. 165.

(²) H. LEBESGUE, *Sur le Problème de Dirichlet* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXIV, 1907).

31. Lorsque l'intégrale de Dirichlet tend vers une limite déterminée, l'ensemble des valeurs des $z_{x,y}$ tend également vers une fonction limite.

Pour le calcul qui va suivre il est indispensable que les valeurs considérées à la frontière soient les mêmes dans les différents réseaux, sur toute l'étendue de la courbe frontière, et non plus seulement sur les nœuds. Nous supposerons donc que le calcul ait été dirigé en conséquence, comme nous l'avons indiqué au n° 6.

Pour un réseau donné, à chaque système de valeurs des $z_{x,y}$ nous avons attaché une fonction $u(x, y)$, égale à $z_{x,y}$ sur les nœuds et sur la frontière, linéaire dans les triangles, sauf peut-être dans les triangles ayant leur base sur la frontière. Nous désignons par $u_r(x, y)$ la fonction que l'on forme de cette manière quand on attribue aux variables z_{xy} pour un réseau (r) les valeurs qui correspondent au minimum de l'intégrale de Dirichlet relative à ce réseau.

Quand la densité du réseau (r) croît indéfiniment, l'intégrale $J(u_r)$ tend par hypothèse vers une limite. Par conséquent, si l'on considère deux réseaux suffisamment denses (r_0) et (r), la différence $J(u_{r_0}) - J(u_r)$ tend vers zéro.

Considérons maintenant la fonction $u_{r_0}^r$ que l'on forme comme ci-dessus, mais en attribuant aux variables $z_{x,y}$, sur les nœuds du réseau (r), les valeurs de la fonction u_{r_0}. Quel que soit le réseau (r_0) il est possible de prendre (r) assez dense pour que l'intégrale $J(u_{r_0}^r)$ diffère aussi peu qu'on le voudra de $J(u_{r_0})$; par conséquent, si le réseau (r_0) est lui-même très dense, la différence

$$J(u_{r_0}^r) - J(u_r)$$

sera très petite, dans notre hypothèse.

Or les fonctions $u_{r_0}^r$ et u_r étant égales sur la frontière, nous avons

$$J(u_{r_0}^r) - J(u_r) = J(u_{r_0}^r - u_r).$$

32. Du fait que cette intégrale tend vers zéro, nous allons déduire que les dérivées partielles de la différence

$$v_{r_0,r} = u_{r_0}^r - u_r$$

tendent elles-mêmes vers zéro dans le domaine considéré, frontière exclue.

En effet, dans tout rectangle R à côtés parallèles aux axes et intérieur au domaine, les fonctions u_{r_0}, u_r et leurs dérivées premières sont représentées avec telle approximation que l'on veut par des fonctions harmoniques V_{r_0}, V_r et leurs dérivées. Or ces fonctions harmoniques admettent des dérivées secondes auxquelles on peut assigner un module maximum. Lorsqu'une fonction V est harmonique dans un domaine (Δ) et que ses valeurs sur la frontière ont leur module inférieur à M, le module des dérivées secondes de V, en tout point P situé à une distance ρ de la fontière, est au plus égal à $\frac{2M}{\rho^2}$.

Par conséquent si, au point P, la différence $\frac{\partial V_{r_0}}{\partial x} - \frac{\partial V_r}{\partial x}$ a un module supérieur à un nombre k, on pourra déterminer autour de P une région finie, dont nous désignerons l'aire par σ, dans laquelle on aura constamment

$$\left(\frac{\partial V_{r_0}}{\partial x} - \frac{\partial V_r}{\partial x}\right) > \frac{k}{2}.$$

Si, d'autre part, les réseaux sont assez denses, on aura dans la même région,

$$\frac{\partial v_{r_0,r}}{\partial x} = \frac{\partial (u_{r_0}^r - u_r)}{\partial x} > \frac{k}{4},$$

d'où

$$J(v_{r_0,r}) > \frac{k^2}{16}\sigma.$$

Le nombre k est donc nécessairement très petit, pour des réseaux très denses, dans tout l'intérieur du domaine, à l'exclusion de la frontière.

Par suite, la différence $u_{r_0} - u_r$ diffère très peu d'une constante. Toutefois, bien qu'elle s'annule sur la frontière, il serait prématuré de conclure qu'elle tend partout vers zéro, car jusqu'ici nous avons exclu de nos raisonnements tout ce qui concerne la continuité dans le voisinage de la frontière. Pour l'étude de cette question, on peut utiliser la méthode employée par M. Lebesgue dans son Mémoire déjà cité ([1]).

Malheureusement, le calcul de M. Lebesgue se trouverait en défaut pour les domaines à plus de deux dimensions. La proposition suivante

---

([1]) *Sur le Problème de Dirichlet*, § 10.

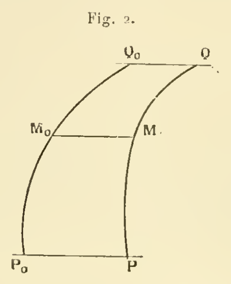
pourrait être étendue à ces domaines, mais elle présente une autre lacune, car elle n'établit la continuité dans le voisinage de la frontière qu'abstraction faite d'un ensemble de points de mesure nulle.

53. Considérons une fonction $F(x, y)$ dont les valeurs sur la frontière forment une fonction intégrable ; supposons qu'elle reste continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur du domaine et que l'intégrale de Dirichlet correspondante ait une valeur finie

$$J(F) = I_0.$$

Prenons sur la frontière un arc P_0Q_0 qui soit rencontré en un seul point par toute parallèle à Ox.

Fig. 2.



Nous désignerons par y_0 et y_1 ($y_0 < y_1$) les coordonnées des extrémités.

Par chaque point M_0 de cet arc menons une parallèle à Ox, sur laquelle nous portons vers l'intérieur du domaine un petit segment M_0M, dont la longueur λ pourra être une constante ou une fonction de y. Nous déduisons ainsi de P_0Q_0 un arc PQ intérieur au domaine. L'intégrale

$$\iint \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$$

étendue à l'aire P_0PQQ_0 a évidemment une valeur au plus égale à I_0. Or, il est facile d'en calculer une limite inférieure. Soit $\omega(y)$ l'oscillation de la fonction $F(x, y)$ sur M_0M. Il existe alors sur le segment M_0M

un point M_1 tel qu'on ait

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{\partial F}{\partial x}\, dx = \pm\, \omega(y).$$

Pour toutes les fonctions F satisfaisant à cette condition le minimum de l'intégrale

$$\int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 |\,dx\,|$$

a lieu quand la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$ a une valeur constante sur $M_0 M_1$. D'où nous tirons les inégalités

$$(53) \qquad \int\int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 |\,dx\,| \geqq \frac{\overline{\omega(y)}^2}{M_0 M_1} \geqq \frac{\overline{\omega(y)}^2}{\lambda}$$

et

$$(54) \qquad \int\int_{P_0PQQ_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \geqq \int_{y_0}^{y_1} \frac{\overline{\omega(y)}^2\, dy}{\lambda}.$$

Soient α un nombre positif, λ_0 le maximum de λ, l la mesure linéaire de l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles $\omega(y)$ est supérieure à α.

L'inégalité (54) donne immédiatement, en prenant pour l'intégrale définie la définition de M. Lebesgue,

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\overline{\omega(y)}^2\, dy}{\lambda} > \frac{l\alpha^2}{\lambda_0}.$$

Nous avons, par conséquent,

$$l < \frac{I_0 \lambda_0}{\alpha^2}.$$

La mesure linéaire l de l'ensemble des valeurs de y pour lesquelles l'oscillation $\omega(y)$ surpasse un nombre positif α tend nécessairement vers zéro avec λ_0.

La limite supérieure trouvée pour l ne dépend pas de la fonction F, ni de la longueur de l'arc $P_0 Q_0$, mais seulement de I_0; elle est applicable, par conséquent, à l'ensemble de toutes les fonctions F, pour les-

quelles l'intégrale de Dirichlet, étendue au domaine considéré, est inférieure ou égale à I_0.

Telles seraient les fonctions u_{r_0}, u_r, $u_{r_0}^r - u_r$. En particulier, la fonction $u_{r_0}^r - u_r$ s'annule sur l'arc P_0Q_0; sur l'arc PQ elle est très voisine d'une constante si les réseaux sont très denses. Cette constante est donc elle-même très voisine de zéro, et l'unité de la solution limite se trouve par suite établie. La continuité dans le voisinage de la frontière résulte aussi évidemment de la même proposition, avec la restriction que nous avons indiquée.

34. La limite n'est pas modifiée si, pour chaque réseau (r), on remplace la fonction $\zeta(\xi, \eta)$, donnée sur le contour, par une fonction $\zeta_r(\xi, \eta)$, telle que la différence $\zeta - \zeta_r$ tende uniformément vers zéro sur toute la frontière.

En effet, si l'on a, sur tout le contour,

$$|\zeta - \zeta_r| < \varepsilon,$$

la différence des valeurs correspondantes des inconnues $z_{x,y}$ est elle-même, dans tout le domaine, inférieure à ε.

En particulier, quand la fonction $\zeta(\xi, \eta)$ est continue, on obtient la même limite soit qu'on prenne la fonction $u_r(x, y)$ égale à ζ sur tout le contour, soit qu'on lui attribue les valeurs considérées seulement sur les nœuds de la frontière, en l'assujettissant alors à être linéaire en x et y dans les triangles qui ont leur base sur le contour.

35. Une remarque analogue s'applique au cas où, la fonction $\zeta(\xi, \eta)$ étant continue, l'intégrale de Dirichlet n'existe pour aucune des fonctions qui prennent sur la frontière les valeurs données. On peut construire, d'une infinité de manières, une suite de fonctions ζ_1, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$, qui convergent uniformément vers ζ, et pour lesquelles l'intégrale existe. Désignons par $u_r(x, y, \zeta)$, $u_r(x, y, \zeta_n)$ les valeurs que prend la fonction $u_r(x, y)$ correspondant à un réseau (r), lorsqu'on attribue aux variables $z_{x,y}$ sur les nœuds de la frontière les valeurs des fonctions ζ, ζ_n.

Quelque petit que soit ε, on peut prendre n assez grand pour qu'on ait sur toute la frontière

$$|\zeta - \zeta_n| < \varepsilon.$$

Il en résulte dans tout le domaine

$$|u_r(x, y, \zeta) - u_r(x, y, \zeta_n)| < \varepsilon.$$

Quand la densité du réseau (r) croît indéfiniment la fonction $u_r(x, y, \zeta_n)$ tend vers une fonction harmonique déterminée $V(x, y, \zeta_n)$, indépendante des réseaux considérés. Les limites possibles de la fonction $u_r(x, y, \zeta)$ étant comprises dans l'intervalle

$$V(x, y, \zeta_n) - \varepsilon, \qquad V(x, y, \zeta_n) + \varepsilon$$

qu'on peut restreindre autant qu'on veut, il en résulte nécessairement que la limite est unique, indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître indéfiniment la densité des réseaux.

La continuité, dans le voisinage de la frontière, des fonctions $V(x, y, \zeta_n)$, entraîne aussi d'ailleurs celle de la fonction $V(x, y, \zeta)$, et de cette continuité résulte de nouveau l'unicité de la solution.

Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique;

Par Henri VILLAT.

La théorie du mouvement discontinu des fluides, fondée sur les principes de Helmholtz et Kirchhoff, auxquels MM. T. Levi-Civitá (¹) et M. Brillouin (²) ont apporté des perfectionnements essentiels, a donné naissance à de nombreux travaux récents (³). Dans tous les cas jusqu'ici élucidés, on peut, en appliquant des méthodes que j'ai indiquées (⁴), étudier le problème de l'écoulement d'un courant fluide, illimité ou non, autour d'un obstacle de forme donnée, les parois (s'il y en a) limitant le fluide quand celui-ci n'est pas illimité, ayant aussi des formes données à l'avance. Mais, comme l'a montré M. M. Brillouin, d'autres difficultés restent en suspens, et généralement la solution ainsi construite reste illusoire, la solution (une fois construite) se heurtant à diverses impossibilités très malaisées à déceler *a priori*.

Je me propose, dans ce qui suit, d'établir quelques conditions, d'une application pratique excessivement aisée, concernant la fonction arbitraire dont dépend la forme de l'obstacle supposé placé dans le courant, conditions qui soient *suffisantes* pour que la solution correspondante soit générale et acceptable. J'étudie d'abord le cas du fluide

(¹) T. Levi-Civita, *Circolo mat. di Palermo*, 1907.

(²) M. Brillouin, *Journal de Chimie et de Physique*, 1911, p. 145.

(³) *Voir* notamment les Mémoires de MM. U. Cisotti, G. Colonnetti, T. Boggio et les nôtres. Pour la bibliographie détaillée, *voir* l'article *Développements concernant l'Hydrodynamique* dans l'*Encyclopédie mathématique*, de M. J. Molk, t. IV, Vol. V, fasc. 2, notamment p. 118 et suiv.

(⁴) Cf. *Comptes rendus*, t. 151, p. 1034; t. 152, p. 303, 1081, etc.

indéfini, puis celui, beaucoup plus complexe, du fluide limité par deux parois; j'ai notamment insisté sur le cas, le plus intéressant pour l'application pratique, d'obstacles convexes en forme de proues.

Des conditions à la fois nécessaires et suffisantes peuvent d'ailleurs être formulées explicitement; mais elles conduisent, relativement à la fonction arbitraire dont il vient d'être question, à des relations compliquées dont il est impossible de tirer effectivement parti avant d'avoir construit la solution tout entière du problème d'Hydrodynamique correspondant : or, c'est précisément cette construction préalable que je me suis proposé d'éviter.

Quelques-uns des résultats qui vont être exposés ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 27 octobre 1913 (*Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 700-703).

CAS DU FLUIDE INDÉFINI.

Nous nous occuperons tout d'abord du cas le plus simple, celui où le fluide est supposé indéfini autour de l'obstacle. Les formules qui permettent d'aborder le problème ont été dans ce cas établies par M. T. Levi-Cività et par nous-même. Je rappelle en quelques mots ceux des résultats dont nous aurons besoin.

Les projections de la vitesse à l'infini étant 1 et 0, si l'on désigne par p la pression en un point du fluide (non situé dans le sillage) et V la vitesse (de projections u, v) en ce point, on a

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2), \tag{1}$$

p_0 désignant la pression à l'infini et dans le sillage. Tous les éléments du mouvement sont déterminés au moyen d'une fonction $\Omega(\zeta)$ d'une variable complexe $\zeta = \xi + i\eta$, dans le plan de laquelle le fluide en mouvement est représenté sur un demi-cercle, comme l'indiquent suffisamment les figures ci-après.

J'ai montré ([1]) qu'on a

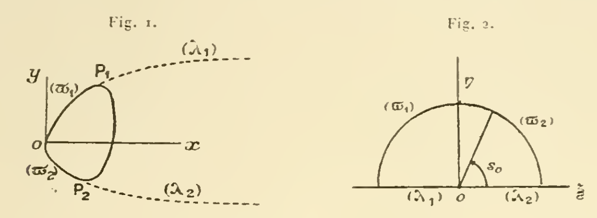
$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Phi(\varepsilon)\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\varepsilon+\zeta^2}d\varepsilon = \Theta + iT; \tag{2}$$

([1]) H. Villat, *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 269.

Θ est l'angle de la vitesse avec Ox ; la vitesse elle-même est

$$V = e^{T}. \tag{3}$$

Quant à la fonction $\Phi(\varepsilon)$, elle est arbitraire autant que l'obstacle donné; $\Phi(\varepsilon)$ est la valeur de l'angle Θ au point de la paroi solide cor-



respondant au point $\zeta = e^{i\varepsilon}$ de la demi-circonférence frontière dans le plan ζ. On sait (¹) que cette fonction $\Phi(\varepsilon)$ doit satisfaire à la condition

$$\int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0. \tag{4}$$

Enfin, rappelons que la correspondance entre les points des plans $z = x + iy$ et $\zeta = \xi + i\eta$ est fournie par l'égalité (²)

$$z = \frac{a^2}{2} \int_{e^{is_0}}^{\zeta} e^{i\Omega(\zeta)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos s_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{5}$$

où a désigne une constante, et e^{is_0} le point correspondant à la proue de l'obstacle, c'est-à-dire au point où le courant se divise avant d'entourer le solide.

Ceci posé, les difficultés qui peuvent se présenter dans la résolution du problème d'Hydrodynamique sont de plusieurs sortes :

I. Pour qu'une configuration construite selon les procédés qu'on vient de rappeler soit acceptable, il faut d'abord qu'elle fournisse pour la pression p des valeurs partout positives. Si l'on veut que la configuration soit générale, c'est-à-dire indépendante de la pression p_0 à l'in-

---

(¹) H. VILLAT, *Ibid.*, p. 282.

(²) T. LEVI-CIVITA, *Circolo di Palermo*, 1907, 1ᵉʳ sem., p. 1.

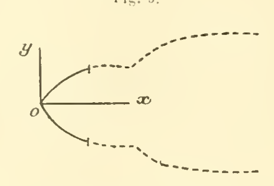
fini, il est nécessaire et suffisant (pour ce qui concerne les pressions) que la vitesse V soit partout au plus égale à l'unité. Comme M. Brillouin l'a montré ([1]), il résulte de là que les lignes de glissement λ_1 et λ_2 doivent être constamment convexes vers le fluide en mouvement; de ce fait se conclut l'impossibilité d'un sillage limité à l'arrière de l'obstacle. Il est intéressant de remarquer ici en passant que, si l'on envisage les cas où la pression p_0 (nécessairement positive ou nulle) ne serait pas nulle, cette convexité des lignes de glissement n'est plus indispensable. Voici un exemple qui met le fait en évidence :

Prenons, comme fonction Φ dans la formule (2), $\Phi(\varepsilon) = -\mathrm{P}\sin\varepsilon$ pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$, en posant en outre $0 < \mathrm{P} < \frac{\pi}{2}$, $\Phi(\pi-\varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$ et $s_0 = \frac{1}{2}\pi$. Un calcul simple montre qu'on a alors

$$\Omega(\zeta) = -\frac{\mathrm{P}}{\pi}\,\frac{1-\zeta^2}{\zeta}\log\frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2};$$

la configuration du mouvement est alors celle de la figure. Les

Fig. 3.



lignes de glissement possèdent chacune un point d'inflexion. Or les pressions seront partout positives dès que l'on aura assujetti p_0 à l'inégalité

$$p_0 > \frac{1}{2}\left(e^{4\frac{\mathrm{P}}{\pi}\frac{\sin s_1}{\cos^2 s_1}} - 1\right),$$

où s_1 représente la racine, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, de l'équation

$$\log\operatorname{tang} s + \frac{1}{\cos^2 s} = 0.$$

C'est ce que montre un calcul facile que je ne reproduis pas.

Bien que des considérations de stabilité physique rendent des confi-

([1]) *Loc. cit.*, p. 150.

gurations telles que la précédente extrêmement improbables dans la réalité, elles n'en sont pas moins théoriquement possibles. La possibilité d'un sillage fermé derrière l'obstacle pourrait alors, à la rigueur, résulter de ces considérations. On peut, toutefois, montrer que l'impossibilité d'un tel sillage reste entière si le fluide est partout indéfini, dans toutes les directions; c'est un point sur lequel je me réserve de revenir. [*Cf.* H. VILLAT, *Sur le changement d'orientation d'un obstacle dans un courant fluide, et sur quelques questions connexes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915), 3e Partie.]

Dans ce qui suit, je me placerai dans le cas général où l'on n'assigne à la pression p_0 aucune limite inférieure. La condition

$$V \leqq 1$$

sera donc nécessaire à la généralité de la configuration à établir.

II. La seconde condition nécessaire pour que la solution soit acceptable est que, au domaine demi-circulaire du plan ζ et à la fonction $\Phi(\varepsilon)$ choisie, corresponde dans le plan z un domaine d'un seul tenant, dont les frontières ne se coupent pas, ni elles-mêmes, ni les unes les autres. Le recoupement en question peut se produire, et M. Brillouin en a donné des exemples.

Si ces deux sortes de conditions sont réalisées, le mouvement que l'on aura considéré sera acceptable, du point de vue de l'Hydrodynamique rationnelle.

Je vais considérer des obstacles symétriques par rapport à l'axe Ox. On sait qu'alors $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$, et que la condition (4) est satisfaite d'elle-même. Nous allons dans ces conditions trouver des circonstances suffisantes pour la validité des solutions, pour des catégories étendues de formes d'obstacles courbes, comprenant notamment les formes les plus intéressantes pratiquement, c'est-à-dire les formes en proues. Nous supposerons toujours que, sur la paroi ϖ_1, la tangente à la paroi (dans le sens du courant) fait avec Ox un angle compris entre les limites o et π.

ÉTUDE DES VITESSES.

Étudions d'abord la difficulté concernant les vitesses. Comme on a $V = e^T$, la fonction T, qui est harmonique et régulière dans le demi-

cercle du plan ζ, ne doit nulle part y devenir positive : elle est nulle par construction sur la frontière constituée par le diamètre horizontal $O\xi$; d'ailleurs, son maximum ne saurait être atteint que sur une frontière; il faut donc simplement s'assurer que T ne devient pas positif sur la frontière demi-circulaire $|\zeta| = 1$.

Sur cette circonférence, la valeur de T n'est pas fournie directement par la formule (2), mais j'ai montré ([1]) qu'au point $\zeta = e^{is}$ on avait

$$(6) \qquad T(s) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \frac{\sin s}{2\sin\frac{\varepsilon - s}{2}\sin\frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon.$$

Or, l'introduction de l'hypothèse (4) permet d'écrire

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \frac{\sin s}{2\sin\frac{\varepsilon - s}{2}\sin\frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)] \frac{\sin s}{2\cos\frac{\varepsilon - s}{2}\cos\frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon,$$

d'où, pour le cas qui nous occupe, après transformations élémentaires,

$$(7) \qquad T(s) = \frac{1}{\pi}\sin s\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos\varepsilon - \cos s} + \frac{\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)}{\cos\varepsilon + \cos s}\right] d\varepsilon,$$

ou enfin

$$(8) \qquad T(s) = \frac{2}{\pi}\sin s\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi(s)\cos s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon.$$

Comme, de toute évidence, on a $T(\pi - s) = T(s)$, il suffit de considérer s entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; alors, sur la formule précédente, un premier résultat apparaît immédiatement.

Si la fonction $\Phi(\varepsilon)\cos\varepsilon$ *est une fonction croissante de* ε *pour* ε

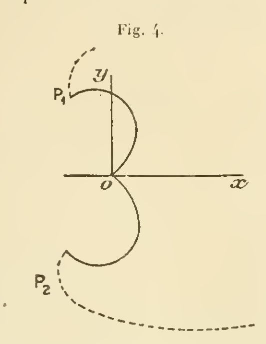
([1]) *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 264.

compris entre o *et* $\frac{\pi}{2}$, $T(s)$ *est toujours négatif, et la vitesse* V *est plus petite que* 1 *dans tout le mouvement.*

Cela résulte de ce que, $\Phi(\varepsilon)\cos\varepsilon$ étant croissant et $\cos^2\varepsilon$ décroissant dans le même intervalle, le quotient qui figure sous le signe d'intégration est visiblement négatif dans tout l'intervalle.

Observons de suite que ce résultat nous donne déjà des catégories

Fig. 4.



d'obstacles intéressantes : par exemple, tous les obstacles *en gouttière*, concaves vers le courant, pour lesquels l'angle $\Phi(\varepsilon)$ (qui est négatif dans tout le long de la paroi P_2O) va en croissant constamment lorsqu'on parcourt cette paroi dans le sens de la flèche. Dans ce cas, on a en effet

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\Phi(\varepsilon)\cos\varepsilon] = \Phi'(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi(\varepsilon)\sin\varepsilon \geqq 0. \tag{9}$$

Mais le théorème s'applique aussi lorsque $\Phi(\varepsilon)$ n'est pas constamment croissant. Voici un exemple qui fournit un obstacle à paroi ondulée (Φ d'abord croissant, puis décroissant) : si l'on prend

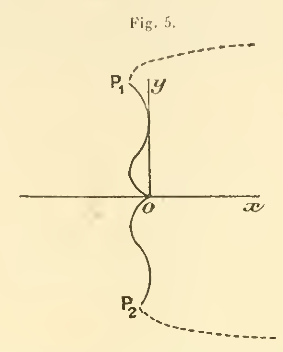
$$\Phi(\varepsilon) = A(-2\cos^2\varepsilon + 2\cos\varepsilon - 1)$$

avec $0 < A < \pi$, on s'assure aisément que la condition ci-dessus est vérifiée et que l'obstacle correspondant possède la forme indiquée par la figure 5 : aux points O, P_1, P_2, les angles des tangentes à la paroi avec Ox sont $\pm A$; aux points d'inflexion, les angles sont $\pm\frac{1}{2}A$.

On peut former autant d'exemples que l'on veut, vérifiant la condition (9), avec des obstacles dont les parois présentent un nombre quelconque d'ondulations.

Le même théorème s'applique aussi à des obstacles convexes vers le

Fig. 5.

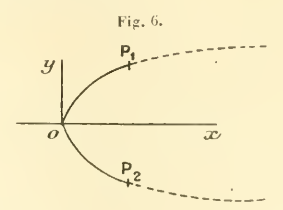


courant, pour lesquels $\Phi(\varepsilon)$ est constamment décroissant. Dans ce cas, l'inégalité à satisfaire montre d'une façon évidente que $\Phi'(0)$ doit être nul. On vérifierait par exemple facilement que la fonction

$$\Phi(\varepsilon) = -A(\sin^2\varepsilon + b),$$

avec $A < \frac{\pi}{4}$, $0 < b < 2$, rentre dans l'application précédente et donne un obstacle de la forme ci-dessous :

Fig. 6.



Pour aller maintenant plus loin, nous allons étudier d'une manière plus précise la variation de la fonction $T(s)$ donnée par la formule (8), quand s varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Nous allons pour cela former une expression

de la dérivée de cette fonction, en utilisant le calcul préliminaire que nous exposerons tout d'abord dans le paragraphe ci-dessous.

CALCUL D'UNE DÉRIVÉE NORMALE.

Rappelons-nous tout d'abord que, la fonction $\Omega = \Theta + i\mathrm{T}$ étant analytique, on a, en désignant par $\frac{d}{dn}$ une dérivée normale prise vers l'extérieur du domaine,

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \frac{d\Theta}{dn},$$

tant que les dérivées écrites conservent un sens. Le calcul de $\frac{d\mathrm{T}}{ds}$ sur la demi-circonférence revient donc à celui d'une dérivée normale. Observons encore que la fonction Ω définie par (2) peut être considérée comme définie dans tout le cercle, $|\zeta| \leqq 1$, les valeurs qu'elle prend dans le demi-cercle inférieur étant conjuguées des valeurs prises dans le demi-cercle supérieur.

Or, envisageons d'une manière plus générale une fonction analytique définie à une constante près, imaginaire pure, dans tout le cercle, par la condition que sa partie réelle prenne à la frontière des valeurs données $\varphi(\varepsilon)$ [sans qu'on ait pour l'instant $\varphi(2\pi - \varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$]. La fonction

$$(10) \qquad \omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon)\frac{1 + \zeta e^{-i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon = \mathfrak{S} + i\tau$$

répond à la question ([1]). Posons

$$\zeta = \rho e^{is}.$$

Tant que ρ est plus petit que 1, on a évidemment

$$(11) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon)\frac{e^{i(s-\varepsilon)}}{[1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}]^2}\,d\varepsilon.$$

([1]) *Cf.* SCHWARTZ, *Zur Integrat. der part. Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ (*Journal de Crelle*, 1872, p. 218). — H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet relatif au cercle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1911, p. 443). — T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1911-1912).

Admettons que la fonction donnée $\varphi(\varepsilon)$ possède une dérivée, sauf peut-être en un nombre fini de points, pour lesquels il y aurait une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ pouvant elle-même être discontinue en ces points. Pour fixer les idées, supposons, comme cela sera le cas dans l'application que nous avons en vue, qu'il y ait quatre tels points : à savoir les deux points $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \pi$, pour lesquels la dérivée $\varphi'(\varepsilon)$ pourra être discontinue, la fonction $\varphi(\varepsilon)$ ne l'étant pas, et les deux points $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $\varepsilon = \varepsilon_2$, pour lesquels la fonction et la dérivée seront toutes deux discontinues.

Dans ces conditions, une simple intégration par parties nous permettra d'écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{i}{\pi \rho}\left[\varphi(\varepsilon)\frac{1}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{\pi \rho}\int_0^{2\pi}\varphi'(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}.$$

En explicitant le crochet du second membre, il faut naturellement tenir compte des discontinuités de la fonction φ; en même temps, faisons apparaître dans l'intégrale restante la différence $\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)$; il est clair qu'il viendra

$$\begin{aligned}(12)\quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = {} & \frac{i}{\pi \rho}\left[\frac{\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon_1)}} + \frac{\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon_2)}}\right] \\ & - \frac{i}{\pi \rho}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(s)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}d\varepsilon - \frac{i}{\pi \rho}\varphi'(s)\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}.\end{aligned}$$

Maintenant un calcul élémentaire nous donne, pour $\rho < 1$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\rho^2}.$$

De sorte que, finalement,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \Im}{\partial \rho} + i\frac{\partial \tau}{\partial \rho} = {} & -\frac{i}{\pi \rho}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(s)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}d\varepsilon - \frac{2i}{\rho^3}\varphi'(s) \\ & + \frac{i}{\pi \rho}\left[\frac{\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon_1)}} + \frac{\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon_2)}}\right].\end{aligned}$$

Et comme on a

$$\frac{1}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}} = \frac{1-\rho\cos(s-\varepsilon) + i\rho\sin(s-\varepsilon)}{1-2\rho\cos(s-\varepsilon)+\rho^2},$$

on en tire de suite

$$(13)\quad \begin{aligned}\frac{\partial \Xi}{\partial \rho} = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(s)]\frac{\sin(s-\varepsilon)\,d\varepsilon}{1-2\rho\cos(s-\varepsilon)+\rho^2}\\ & -\frac{1}{\pi}[\varphi(\varepsilon_1-0)-\varphi(\varepsilon_1+0)]\frac{\sin(s-\varepsilon_1)}{1-2\rho\cos(s-\varepsilon_1)+\rho^2}\\ & -\frac{1}{\pi}[\varphi(\varepsilon_2-0)-\varphi(\varepsilon_2+0)]\frac{\sin(s-\varepsilon_2)}{1-2\rho\cos(s-\varepsilon_2)+\rho^2}.\end{aligned}$$

Or, quand ρ tend vers 1, cette expression prend la forme

$$(14)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\partial \Xi}{\partial \rho}\right)_{\rho=1} = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(s)]\cot\frac{s-\varepsilon}{2}\,d\varepsilon\\ & -\frac{\varphi(\varepsilon_1-0)-\varphi(\varepsilon_1+0)}{2\pi}\cot\frac{s-\varepsilon_1}{2}\\ & -\frac{\varphi(\varepsilon_2-0)-\varphi(\varepsilon_2+0)}{2\pi}\cot\frac{s-\varepsilon_2}{2},\end{aligned}$$

qui a généralement un sens. Il résulte même facilement de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{\partial \Xi}{\partial \rho}$ existe au point e^{is} de la frontière [en supposant bien entendu l'existence de $\varphi'(s)$], est que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}[\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(s)]\cot\frac{s-\varepsilon}{2}\,d\varepsilon$$

ait un sens en ce point. C'est évidemment ce qui aura lieu, sauf aux points de discontinuité dont on a admis la présence.

Ce point étant acquis, observons qu'en un point de la frontière $\rho = 1$, on a

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \rho} = \frac{d\Xi}{dn},$$

et appliquons le résultat qui précède à la fonction Θ considérée antérieurement. Il suffit pour cela de supposer

$$\varphi \equiv \Phi, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{2},$$

$$\varphi(\varepsilon_2-0)=\varphi(\varepsilon_1+0), \qquad \varphi(\varepsilon_2+0)=\varphi(\varepsilon_1-0), \qquad \varphi(\varepsilon_1-0)=-\varphi(\varepsilon_1+0).$$

Nous poserons d'ailleurs, pour abréger l'écriture,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\alpha, \tag{15}$$

de sorte que 2α représentera l'angle que font entre elles les deux tangentes en O aux parois solides (dans le sens du courant). Alors, un calcul élémentaire réduira la partie tout intégrée du second membre de (14) à

$$-\frac{2\alpha}{\pi\cos s}.$$

Ramenons maintenant l'intégrale restante à une autre prise entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$. Admettons toujours l'existence de la dérivée Φ' dans les conditions susdites, et observons que l'hypothèse $\Phi(2\pi-\varepsilon)=\Phi(\varepsilon)$ entraîne $\Phi'(2\pi-\varepsilon)=-\Phi'(\varepsilon)$. Il vient d'abord

$$\frac{d\Theta}{dn}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)]\cot\frac{s-\varepsilon}{2}\,d\varepsilon-\frac{2\alpha}{\pi\cos s}. \tag{16}$$

Or on trouve, par un calcul facile,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)]\cot\frac{s-\varepsilon}{2}\,d\varepsilon=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon-\Phi'(s)\sin s}{\cos\varepsilon-\cos s}\,d\varepsilon.$$

Enfin, la condition $\Phi(\pi-\varepsilon)=-\Phi(\varepsilon)$ entraînant $\Phi'(\pi-\varepsilon)=\Phi'(\varepsilon)$, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon-\Phi'(s)\sin s}{\cos\varepsilon-\cos s}\,d\varepsilon$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon-\Phi'(s)\sin s}{\cos\varepsilon-\cos s}-\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon-\Phi'(s)\sin s}{\cos\varepsilon+\cos s}\right]d\varepsilon$$

et par conséquent on a pour $\frac{d\Phi}{dn}$, c'est-à-dire pour $\frac{d\mathrm{T}}{ds}$,

$$\frac{d\mathrm{T}}{ds}=\frac{2\cos s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon-\Phi'(s)\sin s}{\cos^2\varepsilon-\cos^2 s}\,d\varepsilon-\frac{2\alpha}{\pi\cos s}. \tag{17}$$

De là nous déduisons immédiatement le résultat suivant :

Si $\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon$ *est une fonction de* ε *croissante dans l'intervalle*

o, $\frac{\pi}{2}$, *la fonction* T *sera constamment décroissante dans le même intervalle*. Car l'angle α est positif, et l'intégrale qu'on vient d'écrire sera visiblement négative. Comme la valeur initiale de T pour $s=0$ est zéro, puisque par construction T est nul sur l'axe réel, il en résulte que T *sera partout négatif*. On peut même ajouter, à cause de la formule (3), que, le long des parois solides, la vitesse ira en croissant constamment depuis le point O jusqu'aux points de départ P_1 et P_2 des lignes de glissement.

Ce théorème nous fournit encore des catégories variées de formes d'obstacles, parmi lesquelles notamment des formes en proues. On en formerait explicitement autant d'exemples que l'on voudrait.

Avant d'aller plus loin, faisons usage de la formule (16) que nous venons de démontrer, dans le cas général où l'on ne suppose rien sur le mode de variation de $\Phi'(\varepsilon)$, en vue d'obtenir un théorème qui nous sera important. Remarquons, à cet effet, qu'il est indispensable que T commence par décroître à partir de $s=0$, sans quoi il commencerait par être positif dans un intervalle fini, et la configuration correspondante serait à rejeter. Il n'est pas certain, à cause des transformations qu'on a faites précédemment, et qui peuvent n'être pas valables au point de discontinuité $s=0$, que la valeur initiale de $\frac{dT}{ds}$ soit donnée par la formule (17); mais on a, d'après (16),

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(+0)]\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi} \quad (^1),$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(+0)]\cot\frac{\varepsilon}{2}+[\Phi'(\varepsilon)+\Phi'(+0)]\cot\frac{\varepsilon}{2}\right\}d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi}.$$

On voit alors que, si $\Phi'(+0)$ est positif, cette expression est négative [et même infiniment grande si $\Phi'(+0)$ n'est pas nul (²)]; mais si $\Phi'(+0)$

(¹) Dans ce calcul, $\Phi(+0)$ est la limite, supposée déjà existante, de $\Phi(\varepsilon)$ quand ε tend vers zéro positivement.

(²) Ce résultat est bien conforme aux théorèmes généraux sur les dérivées des potentiels, établis par S. ZAREMBA (*Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1905, p. 70-168); A. HORBORSKI (*Prace Matematyczno-Fizyczno*, 1909, p. 1-141); ALMANSI (*Annali di Mat.*, 1898, p. 1-51); LICHSTENSTEIN (*J. de Crelle*, 1912, p. 12-42).

est négatif et non nul, cette expression est au contraire sûrement positive, et par suite T commence par croître. Enfin, si $\Phi'(+0)$ est nul, il sera nécessaire que l'expression restante

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi'(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi},$$

qu'on mettra sous la forme

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi},$$

soit négative (ou nulle); d'où en ce cas la condition nécessaire

$$(18)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon + \alpha \geqq 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \geqq 0.$$

Si maintenant on observe que cette condition se trouve vérifiée d'elle-même si $\Phi'(+0) > 0$, et qu'elle entraîne $\Phi'(+0) = 0$ si l'on ne suppose pas cette quantité positive, on voit que *cette condition* (18) *est nécessaire dans tous les cas.* Ce fait sera essentiel ultérieurement.

Il est important d'introduire ici une remarque sur le sens de cette condition. En général, elle assure que le rayon de courbure des lignes de glissement au départ, c'est-à-dire aux points P_1 et P_2, soit nul : les obstacles correspondants sont donc tous à bords tranchants. Au contraire, le cas des obstacles formant proue véritable, c'est-à-dire des obstacles à l'arrière desquels le jet se détache avec un rayon de courbure non nul, ne peut correspondre qu'au cas limite où l'inégalité (18) se transforme en une inégalité (*Cf.* M. Brillouin, *loc. cit.*, p. 179). Si l'on calcule en effet le rayon de courbure de la ligne de glissement inférieure, en P_2, ce rayon est

$$R = \left|\frac{d\sigma}{d\Theta}\right|,$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément d'arc de la ligne de glissement, fourni par [éq. (5)]

$$|d\sigma| = |dz| = \left|\frac{a^2}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right| = d\zeta\,\frac{a^2}{2}\,\frac{1-\zeta^4}{\zeta^3},$$

puisque, sur la ligne en question, ζ est réel et que le module de $ei\Omega$, égal à l'inverse de la vitesse, est égal à 1. On a donc

$$R = \frac{a^2}{2} \frac{1-\zeta^4}{\zeta^3 \left| \frac{d\Theta}{d\zeta} \right|}. \tag{18'}$$

Or $\frac{d\Phi}{d\zeta}$, pour $\zeta = 1$, qui correspond au point P_2, n'est autre que la dérivée normale extérieure, déjà calculée, en ce point : on a vu qu'elle était égale à

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Donc, tant que cette expression n'est pas nulle, on a bien $R = 0$ pour $\zeta = 1$, d'où le résultat annoncé : la proue véritable correspond bien au cas limite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon + \alpha = 0.$$

Revenons maintenant à la formule (17), et supposons que l'on ne soit pas dans le cas d'application des résultats antérieurs concernant le signe de T. Pour aller plus loin, il serait alors nécessaire de savoir le sens de la variation de la fonction de s suivante :

$$P(s) = \frac{2 \cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon. \tag{19}$$

Or le changement de variables et de fonction

$$s_1 = \frac{\pi}{2} - s, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \qquad \Phi\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) = \psi(\varepsilon_1)$$

permet d'écrire

$$P(s) = P_1(s_1) = \frac{2 \sin s_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(\varepsilon_1) \cos \varepsilon_1 - \psi(s_1) \cos s_1}{\sin^2 \varepsilon_1 - \sin^2 s_1} d\varepsilon_1,$$

ou encore

$$P_1(s_1) = -\frac{2 \sin s_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(\varepsilon_1) \cos \varepsilon_1 - \psi(s_1) \cos s_1}{\cos^2 \varepsilon_1 - \cos^2 s_1} d\varepsilon_1.$$

Or, si l'on se reporte à la formule (8), on vérifie immédiatement que cette expression n'est autre, au signe près, que la valeur de la partie imaginaire d'une fonction analytique analogue à $\Omega(\zeta)$, et définie par les valeurs de sa partie réelle sur la circonférence $|\zeta| = 1$, à savoir : $\psi(\varepsilon_1)$ pour $0 < \varepsilon_1 < \frac{\pi}{2}$, avec les relations supplémentaires

$$\psi(\pi - \varepsilon_1) = -\psi(\varepsilon_1), \qquad \psi(2\pi - \varepsilon_1) = \psi(\varepsilon_1).$$

Alors, en admettant l'existence d'une dérivée $\psi'(\varepsilon_1)$, c'est-à-dire celle de $\Phi''(\varepsilon)$, sauf peut-être aux points déjà indiqués antérieurement, un procédé déjà employé permettra de mettre la dérivée $\frac{dP_1}{ds_1}$ sous la forme

$$\frac{dP_1}{ds_1} = -\frac{2\cos s_1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi'(\varepsilon_1)\sin\varepsilon_1 - \psi'(s_1)\sin s_1}{\cos^2\varepsilon_1 - \cos^2 s_1}\,d\varepsilon_1 - \frac{1}{\pi\cos s_1}\left[\psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \psi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right)\right].$$

Revenons aux notations primitives : remarquons que l'on a

$$\psi'(\varepsilon_1) = \frac{d\psi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = -\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) = -\Phi''(\varepsilon),$$

$$\frac{dP_1}{ds_1} = -\frac{dP}{ds}, \qquad \psi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \qquad \text{et} \qquad \psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \Phi'(+0);$$

il vient

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{2\sin s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi''(s)\cos s}{\sin^2\varepsilon - \sin^2 s}\,d\varepsilon + \frac{2\Phi'(+0)}{\pi\sin s}$$

ou encore

$$(20) \qquad \frac{dP}{ds} = \frac{2\sin s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi''(s)\cos s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s}\,d\varepsilon + \frac{2\Phi'(+0)}{\pi\sin s}.$$

On a vu que $\Phi'(+0)$ était nécessairement positif ou nul ; supposons que cette quantité soit nulle : c'est notamment le cas (*cf.* p. 244) pour tous les obstacles en forme de proue convexe, pour lesquels nécessairement $\Phi'(\varepsilon)$ est partout négatif $\left(\text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$. Supposons

de plus $\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon$ croissant dans cet intervalle, alors $\frac{dP}{ds}$ sera toujours négatif, P ira en décroissant; $\frac{dT}{ds}$, somme de deux quantités décroissantes, sera aussi décroissante, et comme sa valeur initiale est négative, elle sera toujours négative; de sorte que T décroîtra constamment, à partir de zéro, et sera toujours négatif. D'où le résultat suivant :

Si l'on a $\Phi'(+0) = 0$, *et si la fonction* $\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon$ *est croissante dans l'intervalle* $0, \frac{\pi}{2}$, *les vitesses seront partout plus petites que* 1; de plus, le long des parois solides, la vitesse croîtra de 0 à 1, depuis le point O jusqu'aux points P_1 et P_2.

Continuons à supposer $\Phi'(+0) = 0$, mais qu'on ne soit pas dans le cas d'appliquer le résultat précédent, ni l'un des antérieurs. Dans ces conditions, l'expression de $\frac{dP}{ds}$, alors réduite à

$$(21) \qquad \frac{dP}{ds} = \frac{2\sin s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi''(s)\cos s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s}\,d\varepsilon,$$

rapprochée de la formule (8), nous permet de conclure, en admettant l'existence d'une dérivée troisième $\Phi'''(\varepsilon)$ continue toujours dans les mêmes conditions que les dérivées précédemment introduites,

$$(22) \qquad \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{2\cos s}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon)\sin\varepsilon - \Phi'''(s)\sin s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s}\,d\varepsilon + \frac{2\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{\pi\cos s}.$$

D'autre part, un calcul immédiat nous donne

$$\frac{d^3T}{ds^3} = \frac{d^2P}{ds^2} - \frac{2\alpha}{\pi}\,\frac{1+\sin^2 s}{\cos^3 s}.$$

Alors, si l'on suppose $\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leqq 0$, et $\Phi'''(\varepsilon)\sin\varepsilon$ croissant dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, on voit que $\frac{d^2T}{ds^2}$ sera décroissant. Sa valeur initiale se présente sous forme indéterminée, mais on démontre aisément que $\frac{dP}{ds}$ tend vers zéro avec s; il suffit pour cela de montrer que,

η étant un nombre positif choisi arbitrairement petit on a

$$(23) \qquad \sin s \int_0^{\eta} \frac{\Phi''(\varepsilon)\cos\varepsilon - \Phi''(s)\cos s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s}\, d\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} \text{quantité infiniment} \\ \text{petite avec } \eta. \end{array} \right.$$

Or l'existence admise de la dérivée Φ''', supposée finie, permet de décomposer l'intégrale (23) en deux, l'une étendue de s à η, et qui est de l'ordre de η, l'autre étendue de 0 à s, et qui tend vers zéro avec s. D'où la conclusion désirée.

Alors $\frac{dP}{ds}$ est toujours négative, $\frac{dT}{ds}$ également, comme décroissant à partir d'une valeur négative, et par suite T étant toujours négatif, les vitesses sont partout inférieures à 1. D'où encore ce résultat :

Si l'on a $\Phi'(+0) = 0$, $\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leqq 0$, *et si* $\Phi'''(\varepsilon)\sin\varepsilon$ *est une fonction croissante dans l'intervalle* $0, \frac{\pi}{2}$, *les vitesses dans le fluide seront partout inférieures à* 1. Sur les parois solides, les vitesses seront encore croissantes depuis le point O jusqu'aux points P_1 ou P_2.

Il est clair qu'on peut poursuivre indéfiniment l'application du procédé employé, et qu'on arrivera à un résultat de la forme générale suivante :

En admettant l'existence des dérivées de $\Phi(\varepsilon)$ jusqu'à l'ordre $2n$ ou $2n+1$, on sera sûr que les vitesses ne dépassent jamais l'unité, moyennant que la fonction $\Phi^{(2n)}(\varepsilon)\cos\varepsilon$ ou la fonction $\Phi^{(2n+1)}(\varepsilon)\sin\varepsilon$ sera constamment croissante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, et moyennant quelques égalités ou inégalités supplémentaires relatives aux valeurs des dérivées de Φ aux extrémités, 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'intervalle. Je n'expliciterai pas davantage ces inégalités, qui ont été écrites ci-dessus pour les premières valeurs de n.

Nous allons maintenant considérer plus particulièrement les obstacles dont le profil est convexe vers le courant, catégorie d'obstacles qui comprend les formes de proues convexes (*Cf.* plus haut, p. 244). Cela revient à dire que nous supposons que la fonction $\Phi(\varepsilon)$ est une fonction négative décroissante, de ε, dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, c'est-

à-dire

$$\Phi(\varepsilon) < 0, \qquad \Phi'(\varepsilon) < 0.$$

Le long de la paroi solide OP_2, on peut écrire, comme nous l'avons vu [éq. (7)], la valeur de T sous la forme

$$T(s) = \frac{\sin s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos\varepsilon - \cos s} + \frac{\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)}{\cos\varepsilon + \cos s} \right] d\varepsilon \qquad \left(0 < s < \frac{\pi}{2}\right).$$

Observons que les deux fonctions

(24) $$A(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos\varepsilon + \cos s} d\varepsilon$$

et

(25) $$B(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos\varepsilon - \cos s} d\varepsilon$$

sont positives, la première à cause de l'hypothèse $\Phi < 0$, la seconde à cause du fait que $\Phi(s)$ décroît, ainsi que $\cos s$, dans l'intervalle considéré. Démontrer que T reste négatif reviendrait à faire voir qu'on a constamment

$$A(s) > B(s).$$

On s'assure très aisément que la décroissance de Φ entraîne que la fonction $A(s)$ soit croissante. D'autre part, nous savons que, au départ, pour $s = 0$, la différence $A - B$ commence par être négative ou nulle, puisque l'inégalité (18) nécessaire assure, comme on l'a déjà vu, que T commence par diminuer et que T est nul au départ. Il est donc un cas où nous pourrons affirmer *a priori* que l'inégalité (18) est toujours satisfaite, à savoir celui où la fonction $B(s)$ serait constamment décroissante.

Or posons

$$u = \cos\varepsilon, \qquad u_0 = \cos s,$$
$$\Phi(\varepsilon) = -F(u).$$

La fonction $F(u)$ sera positive décroissante dans l'intervalle $0 < u < 1$ (voir *fig.* 7), et l'on aura immédiatement

$$B(s) = B_1(u) = \int_0^1 - \frac{F(u) - F(u_0)}{u - u_0} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Or la figure donne de suite

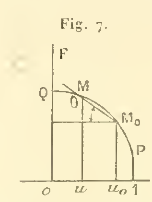
$$\frac{F(u_0) - F(u)}{u - u_0} = \tan \theta,$$

d'où

$$B_1(u) = \int_0^1 \tan \theta \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Ceci posé, on voit que, si la courbe de la figure est convexe du côté des F positifs, l'expression tang θ décroîtra lorsque, quel que soit M fixe,

Fig. 7.



le point M_0 se déplacera dans le sens de P vers Q, c'est-à-dire lorsque s croîtra; il en sera par suite de même de la fonction $B(s)$. Il en résulte donc, dans ce cas, que T est toujours négatif. Or la convexité est tournée vers le haut, si $F'(u) = \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$ est une fonction décroissante de u, c'est-à-dire une fonction croissante de ε; on a donc le théorème suivant :

Pour des obstacles convexes vers le courant $[\Phi(\varepsilon) < 0, \ \Phi'(\varepsilon) < 0]$, *si* $\frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$ *est une fonction croissante dans l'intervalle* $0, \frac{\pi}{2}$, *les vitesses dans le fluide sont partout acceptables, c'est-à-dire inférieures à* 1.

On peut améliorer ce résultat par l'artifice suivant (applicable du reste également aux théorèmes antérieurement énoncés), que je vais exposer rapidement.

Avec les mêmes notations que plus haut, soit

$$\Phi_1(\varepsilon) = F_1(u)$$

une nouvelle fonction, non forcément positive dans tout l'intervalle 0, 1 pour u, et non forcément décroissante; supposons que la fonction T_1, calculée au moyen de F_1 (ou de Φ_1) comme T se calcule au moyen de F, soit constamment positive; supposons, en outre, que cette fonc-

tion vérifie l'inégalité fondamentale (18). Dans ces conditions, si l'on a, dans l'intervalle 0, 1,

$$F(u) + F_1(u) \geqq 0, \qquad F'(u) + F'_1(u) < 0, \qquad F''(u) + F''_1(u) < 0,$$

la fonction $F + F_1$ se trouve dans le cas d'application du théorème précédent, car l'inégalité (18) étant vérifiée par F et par F_1 est vérifiée par la somme $F + F_1$. Il en résulte qu'on a constamment

$$T + T_1 \leqq 0$$

et, par suite,

$$T < 0.$$

En voici un exemple simple. Cherchons si l'on peut trouver une fonction F_1 égale à un polynome du second degré; posons

$$F_1(u) = au^2 + 2bu + c.$$

Un calcul élémentaire montre que l'inégalité fondamentale (18) exige ici

$$(26) \qquad b\pi + 2a + c \leqq 0, \qquad = k^2.$$

D'autre part, la condition que T_1 soit positif se met sans difficulté sous la forme

$$(27) \qquad (a\cos^2 s + c)\left[(a + b\pi)\frac{\sin s}{a\cos^2 s + c} + \log\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{s}{2}\right)\right] \leqq 0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour $0 < s < \frac{\pi}{2}$. Pour $s = \frac{\pi}{2}$, cela exige évidemment

$$c < 0.$$

Appelant $H(s)$ le crochet qui figure dans (27). On a facilement

$$\frac{dH}{ds} = (a + b\pi)\frac{\cos s(2a + c - a\cos^2 s)}{(a\cos^2 s + c)^2} + \frac{1}{\cos s}$$
$$= \operatorname{sgn}\{-ab\pi\cos^4 s + [2ac + (a + b\pi)(2a + c)]\cos^2 s + c^2\} = \operatorname{sgn} U(\cos^2 s).$$

$H(s)$ étant certainement positif pour $s = \frac{\pi}{2}$, et nul pour $s = 0$, cherchons à exprimer qu'il est toujours positif, ce qui sera assuré s'il est toujours croissant. Il est nécessaire pour cela que $U(1)$ soit positif,

ce qui donne

$$-ab\pi + 2ac + (a + b\pi)(2a + c) + c^2 \leqq 0.$$

Supposons alors a négatif (hypothèse naturelle en vue d'assurer à la condition $F'' + F''_1 < 0$ le maximum de chances d'être réalisée). Posons

$$a = -a', \qquad c = -c',$$

et remplaçons dans l'inégalité précédente $b\pi$ par sa valeur

$$b\pi = 2a' + c' + k^2$$

tirée de (26); il vient, par un calcul simple,

$$-k^2(a' + c') \geqq 0, \qquad \text{ce qui exige} \qquad k = 0.$$

Il est maintenant facile de s'assurer que le trinome $U(\cos^2 s)$ a ses racines réelles et positives; nous voulons qu'aucune de ces racines ne soit comprise entre 0 et 1; il faut et il suffit pour cela, vu les conditions précédentes, que

$$\frac{2ac + (a + b\pi)(2a + c)}{2ab\pi} > 1,$$

ce qui réduit à

$$(c' + a')(c' - 2a') < 0 \qquad \text{ou bien} \qquad c' > 2a'.$$

Cela étant, on voit bien maintenant que l'inégalité (27) sera constamment vérifiée. De là on déduit le résultat suivant :

Si, ayant posé

$$u = \cos\varepsilon, \qquad \Phi(\varepsilon) = F(u),$$

on peut trouver deux nombres positifs a' *et* c' ($c' > 2a'$) *tels que les inégalités suivantes*

$$F(u) - a'u^2 + \frac{2}{\pi}(2a' + c')u - c' \geqq 0.$$

$$F'(u) - 2a'u + \frac{2}{\pi}(2a' + c') \leqq 0,$$

$$F''(u) - 2a' \leqq 0$$

soient remplies constamment entre 0 *et* 1, *la solution construite au moyen de la fonction* $\Phi(\varepsilon)$ *donnera naissance à des vitesses partout inférieures à* 1, *donc acceptables.*

Il est facile de s'assurer que les inégalités précédentes seraient entraînées par les suivantes, plus restrictives, mais d'un emploi pratique plus commode :

$$F(u) - c' \geqq 0,$$

$$F'(u) + \frac{2}{\pi}(2a' + c') \leqq 0,$$

$$F''(u) - 2a' \geqq 0.$$

Il serait aisé de donner des exemples d'application de ce résultat, pour lesquels les règles trouvées antérieurement seraient en même temps en défaut.

En ce qui concerne les obstacles convexes vers le courant, il semblerait assez naturel de s'attendre à ce que la condition nécessaire (18) fût en même temps suffisante à assurer la validité de la solution, aussi bien en ce qui concerne les vitesses qu'en ce qui concerne les lignes de glissement. (Pour ces dernières lignes, cela résultera, en effet, d'un théorème démontré un peu plus loin.) Si le fait était exact, il enlèverait tout intérêt au théorème qui vient d'être démontré dans le précédent paragraphe. En réalité, au contraire, la condition (18) n'est pas suffisante pour les obstacles convexes. Je laisse de côté pour le moment la démonstration de cette affirmation, qui sera légitimée *a posteriori* à la fin de ce Mémoire, le point en question étant compris comme cas particulier dans un théorème plus général qu'on trouvera à la page 286 du présent travail.

ÉTUDE DES LIGNES DE GLISSEMENT.

Je me propose d'étudier maintenant l'allure des lignes de glissement, ou de jet; nous considérerons par exemple la ligne λ_2 qui correspond à ζ réel compris entre o et 1. L'angle Θ que fait avec Ox la tangente au jet dans le sens du courant varie alors de zéro (point à l'infini) à la valeur (négative) de l'angle que fait avec Ox la tangente en P_2 à la paroi solide. Toutes les fois que nous pourrons affirmer que Θ décroît dans tout l'intervalle correspondant, il en résultera une ligne λ_2 d'allure normale : cette condition est nécessaire, puisque sur λ_2 ne doit se trouver aucun point d'inflexion, et elle sera évidemment suffisante

pour éviter les recoupements des lignes de glissement entre elles. Nous allons établir certains cas où l'on peut faire cette démonstration.

L'expression de l'angle Θ est égale à celle de $\Omega(\zeta)$ pour ζ réel, puisque alors T est nul; elle est donnée (*Cf.* H. VILLAT, *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, 1911, en particulier p. 263) par la formule

$$(28)\qquad \Omega(\zeta)=\frac{i}{2}\left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right]\log i\frac{\zeta-i}{1-i\zeta} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi'(\varepsilon)\log i\frac{\zeta-e^{i\varepsilon}}{1-\zeta e^{i\varepsilon}}\,d\varepsilon.$$

L'hypothèse $\Phi(\pi-\varepsilon)=-\Phi(\varepsilon)$, d'où résulte $\Phi'(\pi-\varepsilon)=\Phi'(\varepsilon)$, permet d'écrire cette égalité sous la forme

$$(29)\qquad \Omega(\zeta)=\frac{2i\alpha}{\pi}\log\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\log\frac{1-\zeta^2+2i\zeta\sin\varepsilon}{1-\zeta^2-2i\zeta\sin\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

α ayant la même signification que dans les paragraphes précédents. Supposons $\zeta<1$, on en conclut

$$(30)\qquad \frac{d\Omega}{d\zeta}=-\frac{4\alpha}{\pi}\,\frac{1}{1+\zeta^2}-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon}{(1-\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon}\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Sous cette forme, un résultat facile apparaît immédiatement :

Si $\Phi'(\varepsilon)$ *est toujours positif* (*ce qui correspond aux obstacles en gouttière*, concaves vers le courant) $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ est constamment négatif et, par suite, Ω décroît : *la configuration des lignes de jet est donc acceptable*. Ce théorème important a du reste déjà été établi par M. T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un area circolare* (*R. Accad. delle Scienze di Torino*, t. LXVII, 1911-1912).

Considérons maintenant le cas moins immédiat, où l'obstacle est convexe vers le courant (cas comprenant les proues). Le signe de $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ n'est pas en évidence sur l'expression (30) où le second membre est la différence de deux quantités positives $[\Phi'(\varepsilon)<0]$. Or, pour toutes les courbes acceptables, nous devons supposer remplie l'inégalité fonda-

mentale (18)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon} d\varepsilon + \alpha = 0,$$

qui permet de poser

$$\alpha = -K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon} d\varepsilon \tag{31}$$

avec

$$K > 1.$$

On peut alors transformer l'expression (30) de $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ en la suivante :

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\Omega}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\, d\varepsilon \left[\frac{K}{1+\zeta^2}\,\frac{1}{\sin\varepsilon} - \frac{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon}{(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2\sin^2\varepsilon}\right]$$

ou bien

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\Omega}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H \frac{\Phi'(\varepsilon)\, d\varepsilon}{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon[(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2\sin^2\varepsilon]},$$

en posant

$$H = K[(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2\sin^2\varepsilon] - (1+\zeta^2)^2\sin^2\varepsilon.$$

Or la fonction H est constamment positive pour les valeurs de ζ entre 0 et 1, et celles de ε entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; car, considérée comme fonction de ε, elle est visiblement positive pour $\varepsilon = 0$, et elle ne s'annule jamais; en effet, la valeur de $\sin^2\varepsilon$ qui serait racine de H peut s'écrire

$$\sin^2\varepsilon = \frac{K(1-\zeta^2)^2}{(1+\zeta^2)^2 - 4K\zeta^2} = \frac{K}{1 + 4(1-K)\frac{\zeta^2}{(1-\zeta^2)^2}}$$

ou bien

$$\sin^2\varepsilon = \frac{K}{1 + (1-K)\,\mathrm{sh}^2 2\gamma},$$

en posant

$$\zeta = \mathrm{th}\,\gamma \qquad (\gamma \text{ est évidemment réel et positif}).$$

Or, tant que le dénominateur reste positif, c'est-à-dire tant que ζ est assez petit pour qu'on ait

$$1 + (1-K)\,\mathrm{sh}^2 2\gamma > 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{th}\, 2\gamma < \frac{1}{\sqrt{K}},$$

la valeur trouvée pour $\sin^2\varepsilon$ est plus grande que 1, car cette hypothèse se traduit par

$$\frac{K}{1+(1-K)\,\mathrm{sh}^2 2\gamma} > 1$$

ou

$$(K-1)(1+\mathrm{sh}^2 2\gamma) > 0,$$

ce qui est évidemment exact. Enfin, si ζ n'assure plus l'inégalité susdite, l'expression écrite pour $\sin^2\varepsilon$ devient négative, et elle convient encore moins. Par suite, H est toujours positif comme on l'avait annoncé, et il résulte, de l'hypothèse $\Phi'(\varepsilon) < 0$, qu'on a constamment $\frac{d\Omega}{d\zeta} < 0$ et que la ligne de jet est acceptable. D'où le théorème suivant :

Pour tous les obstacles convexes vers le courant, jusques et y compris le cas limite des proues convexes, les lignes de jet sont toujours acceptables, moyennant l'inégalité nécessaire (18).

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Quelle que soit la forme de l'obstacle, chaque ligne de jet est toujours convexe vers le courant au voisinage du point à l'infini.

En d'autres termes, la valeur de Θ (nulle à l'infini pour $\zeta = 0$), commence toujours par décroître.

Partons, en effet, de la formule (30) qui donne $\frac{d\Omega}{d\zeta}$, c'est-à-dire $\frac{d\Theta}{d\zeta}$ pour ζ réel. Pour $\zeta = 0$, elle se réduit, après quelques transformations simples, à

$$(32) \qquad \frac{\pi}{4}\frac{d\Theta}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varepsilon)\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon + \Phi(0) \qquad (\zeta = 0).$$

Or, la fonction $1-\sin\varepsilon$ étant positive et décroissante dans l'intervalle d'intégration, la seconde formule de la moyenne permet d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varepsilon)\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\xi} \Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad \left(0 < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$$

ou bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varepsilon)\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon = \Phi(\xi) - \Phi(0),$$

et, par suite,

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\Theta}{d\zeta} = \Phi(\xi).$$

Comme nous supposons $\Phi(\varepsilon)$ négatif dans tout l'intervalle o, $\frac{\pi}{2}$, puisque cette fonction correspond alors à la paroi inférieure, on voit bien que l'expression ci-dessus est négative, ce qui démontre le fait annoncé.

On pourra donc dans la suite supposer ζ toujours non nul, puisque les valeurs de ζ voisines de zéro ne sauraient introduire, d'après ce qui précède, de difficulté relativement aux lignes de jet.

Il en est généralement de même des valeurs de ζ voisines de $+1$ et de -1; plus précisément : *moyennant toujours l'inégalité fondamentale* (18), *les portions des lignes de jet voisines des parois solides sont toujours convexes vers le fluide en mouvement.*

En effet, si cette inégalité (nécessaire) n'est pas réduite à une égalité, on sait qu'elle assure que $\frac{dT}{ds}$, et, par suite, $\frac{d\Theta}{d\rho}$, soit négatif pour $s = 0$ et $\rho = \zeta = 1$; la question est alors tranchée.

Mais il n'en va pas si simplement si l'inégalité (18) est remplacée par une égalité, auquel cas on a

$$(33) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon + \alpha = 0,$$

et l'on sait que cela entraîne

$$\Phi'(0) = 0.$$

Nous nous proposons d'étudier en détail ce cas qui convient, comme on sait, aux proues (lesquelles ne sont pas nécessairement entièrement convexes vers le liquide en mouvement).

Revenons à la formule (12) démontrée dans la première partie, et qui fournissait la dérivée $\frac{\partial\omega}{\partial\rho}$, au point ρe^{is}, d'une fonction $\omega(\rho e^{is})$ définie en cet endroit. En faisant coïncider cette fonction avec la fonction $\Omega = \Theta + iT$ actuelle, il nous vient facilement

$$(34) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial\rho} = -\frac{2i\alpha}{\pi\rho}\left(\frac{1}{1+i\rho e^{is}} - \frac{1}{1-i\rho e^{is}}\right) - \frac{i}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}\,d\varepsilon - \frac{2i}{\rho^3}\Phi'(s).$$

Notre but étant de déterminer le sens de la variation de Θ au voisinage de $\zeta = 1$ le long de l'axe réel, nous pouvons dans cette formule faire dès maintenant $s = 0$, et, en nous rappelant que $\Phi'(0)$ est nul, il vient

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\right)_{s=0} = -\frac{4\alpha}{\pi}\frac{1}{1+\rho^2} - \frac{i}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon.$$

Observons encore que les points $\varepsilon = 0, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ ne sont pas des points de discontinuité pour la dérivée $\Phi(\varepsilon)$, à cause des hypothèses faites sur la fonction Φ, lesquelles entraînent

$$\Phi'(\pi-\varepsilon) = \Phi'(\varepsilon), \qquad \Phi'(2\pi-\varepsilon) = -\Phi'(\varepsilon),$$

et à cause de la condition $\Phi'(0) = 0$, et enfin de ce fait que nous supposons $\Phi'(\varepsilon)$ partout finie. Dans le cas actuel, $\Phi'(\varepsilon)$ est donc partout continue.

Ceci posé, il est manifeste que, pour ρ inférieur à 1, nous avons le droit d'écrire

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon - \frac{i}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\varepsilon}\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}.$$

Mais on a, en intégrant par partie,

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{-i\varepsilon}\Phi'(\varepsilon)}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}\,d\varepsilon = \left[\frac{\Phi'(\varepsilon)}{-i\rho}\,\frac{1}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{i\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon.$$

La partie tout intégrée est nulle, puisque $\Phi'(\varepsilon)$ est continue. D'autre part, on a

$$\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)-\Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon + \Phi''(+0)\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{-i\varepsilon}},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon = \int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)-\Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon + \frac{i\pi}{\rho^2}\Phi''(+0).$$

De sorte qu'on a finalement

$$(35)\quad \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon - \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)-\Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon - \frac{2}{\rho^4}\Phi''(+0).$$

Dans ces formules, $\Phi''(+0)$ représente la limite, supposée existante, de la dérivée $\Phi''(\varepsilon)$ (supposée elle aussi existante, bien entendu) lorsque ε tend vers zéro positivement; d'ailleurs l'hypothèse

$$\Phi(2\pi-\varepsilon)=\Phi(\varepsilon)$$

entraîne

$$\Phi''(-0)=\Phi''(+0).$$

On voit alors sur la formule obtenue (35), certainement valable pour $\rho<1$, que le second membre conservera un sens si l'on passe à la limite en faisant tendre ρ vers 1. En ne considérant que la partie réelle, nous obtenons ainsi

$$\lim\left(\frac{d^2\Theta}{d\rho^2}\right)_{\substack{s=0\\ \rho=1}}=\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}\,d\varepsilon$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi''(\varepsilon)-\Phi''(+0)]\,d\varepsilon-2\Phi''(+0),$$

ou encore, après simplifications,

$$\lim\left(\frac{d^2\Theta}{d\rho^2}\right)_{\substack{s=0\\ \rho=1}}=\frac{2\alpha}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon-\Phi''(+0). \tag{36}$$

Mais, à cause des propriétés de la fonction $\Phi'(\varepsilon)$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

de sorte qu'en tenant compte de l'hypothèse (33), il reste finalement

$$\lim\left(\frac{d^2\Theta}{d\rho^2}\right)_{\substack{s=0\\ \rho=1}}=-\Phi''(+0). \tag{37}$$

Donc, *dans le cas des proues, si* $\Phi'(0)=0$, *et* $\Phi''(0)\neq 0$, *il est nécessaire que* $\Phi''(0)$ *soit négatif*. Sans quoi $\frac{d\Theta}{d\rho}$, dont la valeur limite est zéro pour $\rho=1$, serait décroissant au voisinage et, par suite, serait positif pour $\rho<1$. Cela entraînerait, comme on sait, la concavité d'une portion de la ligne de jet, vers le fluide mobile.

Remarquons ici que le théorème de la page 256, relatif aux proues

convexes, répond bien à cette condition, car les hypothèses $\Phi'(\varepsilon) < 0$, $\Phi'(0) = 0$, entraînent évidemment $\Phi''(0) < 0$.

Restant dans le cas $\Phi''(0) \neq 0$ et < 0, la question est donc tranchée, et les lignes de jet, au voisinage des points de détachement, sont convexes vers le courant. *Leur rayon de courbure au départ est alors fini.* En effet ce rayon de courbure est égal [form. (18')] à

$$R = \lim_{\rho=\zeta=1} \left| \frac{a^2}{2\zeta^3} \frac{1-\zeta^4}{\frac{d\Theta}{d\zeta}} \right|.$$

Pour $\rho = \zeta = 1$, dans le cas des proues, cette expression se présente sous forme indéterminée, mais le calcul ci-dessus permet de lever l'indétermination, et l'on trouve immédiatement

$$R = \frac{2a^2}{-\Phi''(+0)}.$$

Ce rayon de courbure du jet est égal au rayon de courbure de la paroi solide au même point de détachement. En effet, sur la paroi le rayon de courbure est

$$R_1 = \lim_{(s=0)} \left| \frac{dz}{d\Theta} \right| = \frac{2a^2 \sin s \cos s}{e^{T}} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|.$$

Si l'on fait tendre s vers zéro, T devient nul par construction, et, puisque sur la paroi $\Theta = \Phi(s)$, il vient

$$R_1 = 2a^2 \lim \left| \frac{\sin s}{\Phi'(s)} \right|,$$

c'est-à-dire

$$R_1 = \frac{2a^2}{-\Phi'(+0)} = R.$$

Examinons maintenant le cas où $\Phi''(0) = 0$, cas où la conclusion reste en suspens quant au sens de la concavité du jet; nous savons déjà, bien entendu, qu'au point de détachement la paroi solide et le jet auront un rayon de courbure infini, comme cela résulte immédiatement de ce qui précède. Revenons alors à la formule (35) qui donne $\frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2}$ pour $s = 0$, $\rho < 1$, et faisons dans cette formule $\Phi''(0) = 0$; il

reste

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial\rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon - \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon.$$

On a ensuite le droit d'écrire, pour $\rho < 1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^3\Omega}{\partial\rho^3}\right)_{s=0} &= \frac{8\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3}\right] \\ &\quad - \frac{2i}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon + \frac{2}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon \\ &\quad + \frac{i}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}d\varepsilon - \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}d\varepsilon;\end{aligned}$$

puis, en désignant par $\Phi'''(+0)$ la limite, dont nous supposerons l'existence, de la dérivée $\Phi'''(\varepsilon)$ dont nous supposons aussi qu'elle existe, nous aurons, au moyen de calculs semblables à ceux qu'on a faits précédemment

$$\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}d\varepsilon = -\frac{i}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)\,d\varepsilon}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}d\varepsilon &= \left(\frac{\Phi''(\varepsilon)}{-i\rho}\,\frac{1}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\right)_0^{2\pi} \\ &\quad - \frac{i}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon)-\Phi'''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon - \frac{2i\pi}{\rho^3}\Phi'''(+0).\end{aligned}$$

Donc

$$(38)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\partial^3\Omega}{\partial\rho^3}\right)_{s=0} &= \frac{8\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3}\right] \\ &\quad - \frac{2i}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} + \frac{3}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon \\ &\quad - \frac{i}{\pi\rho^3}\left[\frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}\right]_0^{2\pi} + \frac{i}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon)-\Phi'''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}}d\varepsilon + \frac{2i}{\rho^5}\Phi'''(+0).\end{aligned}$$

Mais $\Phi''(\varepsilon)$ est continue pour $\varepsilon = 0$ et π, à cause de $\Phi''(0) = 0$; elle n'est pas forcément continue pour $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. La définition de la fonction Φ entraîne

$$\Phi''(2\pi-\varepsilon) = \Phi''(\varepsilon), \qquad \Phi''(\pi-\varepsilon) = -\Phi''(\varepsilon)$$

et par suite, en désignant par β, pour abréger, la valeur limite de $\Phi''(\varepsilon)$ quand ε tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures, il vient

$$\beta = \Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\Phi''\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\Phi''\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) = \Phi''\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right).$$

Donc, en prenant la partie réelle de la formule (38), il nous vient

$$(39)\quad \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3}\right] - \frac{4\beta}{\pi}\,\frac{1}{\rho^2(1+\rho^2)}$$
$$- \frac{2}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon\,d\varepsilon}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2} + \frac{3}{\pi\rho^3}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi''(\varepsilon)(1-\rho\cos\varepsilon)}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2}d\varepsilon$$
$$+ \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2}\sin\varepsilon\,d\varepsilon,$$

formule qui ne conserve pas nécessairement un sens lorsqu'on y fait tendre ρ vers 1. La dernière intégrale qui y figure peut en effet s'écrire

$$\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2}\sin\varepsilon\,d\varepsilon = \int_0^{\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2}\sin\varepsilon\,d\varepsilon$$
$$+ \int_0^{\pi}\frac{\Phi'''(\varepsilon) + \Phi'''(+0)}{1-2\rho\cos\varepsilon+\rho^2}\sin\varepsilon\,d\varepsilon.$$

D'où il résulte immédiatement que, si $\Phi'''(+0) \neq 0$, $\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{s=0}$ quand ρ tend vers 1, devient infini du signe de $\Phi'''(+0)$. Pour que Θ soit comme il est nécessaire, décroissant au voisinage de $\rho = 1$, *il faut donc la condition*

$$\Phi'''(+0) < 0.$$

Si maintenant on suppose $\Phi'''(+0) = 0$, la formule (39) conserve un sens à la limite, et elle nous donne

$$\lim\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{\substack{s=0\\ \rho=1}} = -\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\beta}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi'''(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon.$$

Comme on l'a déjà vu plus haut, on a

$$\int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon = -4\alpha;$$

par suite il reste

$$(40) \qquad \lim\left(\frac{\partial^3\Theta}{\partial\rho^3}\right)_{\substack{s=0\\ \rho=1}} = \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi'''(\varepsilon)\cot\frac{\varepsilon}{2}\,d\varepsilon$$
$$= \frac{2(\alpha-\beta)}{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

Il est donc nécessaire, si $\Phi'''(+0) = 0$, *que l'expression*

$$(41) \qquad -\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - \Phi''\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\,d\varepsilon,$$

si on la suppose non nulle, soit négative, pour assurer à la concavité du jet le sens voulu au départ.

Si enfin cette dernière inégalité se transforme en égalité, on devra pousser le calcul plus loin, et l'on aperçoit avec évidence que le procédé employé précédemment pourra être poursuivi. En supposant l'existence des dérivées successives de la fonction $\Phi(\varepsilon)$, si n est l'ordre de la première dérivée $\Phi^n(\varepsilon)$ non nulle pour $\varepsilon = 0$ (ou plus précisément l'ordre de la première dérivée dont la limite soit différente de zéro quand ε tend vers zéro positivement), l'allure des lignes de jet au voisinage de l'obstacle solide sera fixé au bout de n opérations au plus.

Cela étant, nous pouvons donc dans la suite négliger, pour la considération des lignes de jet, les valeurs de ε voisines de 0 ou de ± 1, ce qui concerne de telles valeurs étant élucidé par ce qui précède.

Revenons maintenant à la formule (30) qui donne $\frac{d\Theta}{d\zeta}$. Comme la fonction de ε,

$$\frac{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon}{(1+\zeta^2)^2 + 4\zeta^2\sin^2\varepsilon},$$

est la dérivée de

$$\frac{1}{4\zeta}\log\frac{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon},$$

on voit qu'une simple intégration par partie nous donnera, en admettant toujours l'existence d'une dérivée $\Phi'(\varepsilon)$, et en supposant ζ différent de o et de ± 1,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\zeta^2)\sin\varepsilon}{(1+\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon}\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{4\zeta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}\,\Phi''(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

et par conséquent

$$(42)\quad \frac{\pi}{4}\frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{\alpha}{1+\zeta^2} - \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{1}{4\zeta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\,\Phi''(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

On voit de suite que, si $\Phi'(+0) \geqq 0$, et $\Phi''(\varepsilon) > 0$, $\frac{d\Theta}{d\zeta}$ sera toujours négatif, et les lignes de jet par suite acceptables. Mais ce n'est pas là un résultat nouveau, car ces hypothèses rentrent dans le cas $\Phi'(\varepsilon) > 0$, dont il a été question plus haut. Mais, au moyen de cette nouvelle formule (42), on peut obtenir un résultat intéressant le cas où se trouve réalisée l'hypothèse

$$\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon = \text{fonct. croissante.}$$

ou bien

$$\Phi''(\varepsilon)\sin\varepsilon + \Phi'(\varepsilon)\cos\varepsilon \geqq 0 \qquad \left(\text{entre o et } \frac{\pi}{2}\right),$$

rencontrée à propos de la discussion des vitesses le long des parois solides.

De l'inégalité précédente on tire en effet

$$-\Phi''(\varepsilon) < \Phi'(\varepsilon)\cot\varepsilon,$$

et par suite, en observant que le logarithme qui figure comme coefficient dans l'intégrale de la formule (42) est toujours positif, il vient dans l'hypothèse actuelle,

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\Theta}{d\zeta} < \frac{-\alpha}{1+\zeta^2} - \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta} + \frac{1}{4\zeta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\right)\Phi'(\varepsilon)\cot\varepsilon\,d\varepsilon.$$

Or on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\right)\cot\varepsilon\,\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$=\left\{\left[\log\left(\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\right)\cot\varepsilon\right][\Phi(\varepsilon)-\Phi(+0)]\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

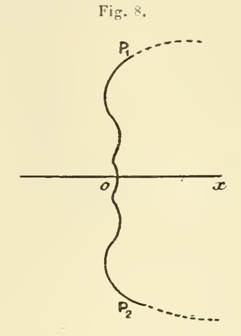
$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\Phi(\varepsilon)-\Phi(+0)]\left[\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\right)+\frac{4\zeta(1+\zeta^2)\cos\varepsilon}{(1+\zeta^2)^2-4\zeta^2\cos^2\varepsilon}\right]d\varepsilon,$$

ce qui, en remplaçant, donne après réductions,

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\Theta}{d\zeta}<-\frac{\alpha}{1+\zeta^2}+\frac{1}{4\zeta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\Phi(\varepsilon)-\Phi(+0)]\left[\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\log\left(\frac{1+\zeta^2+2\zeta\cos\varepsilon}{1+\zeta^2-2\zeta\cos\varepsilon}\right)+\frac{4\zeta(1+\zeta^2)\cos\varepsilon}{(1+\zeta^2)^2-4\zeta^2\cos^2\varepsilon}\right]d\varepsilon.$$

Comme le coefficient de $[\Phi(\varepsilon)-\Phi(+0)]$ dans l'intégrale est positif,

Fig. 8.



on voit donc que le second membre sera constamment négatif si $\Phi(\varepsilon)$ est $<\Phi(+0)$. Donc

Si $\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon$ *est une fonction croissante entre* o *et* $\frac{\pi}{2}$, *et si l'on a l'inégalité*

$$\Phi(\varepsilon)\leqq\Phi(+0),$$

les lignes de jet sont toujours acceptables.

Ce cas correspond, comme on s'en assure facilement, par exemple à des solides à parois ondulées; tel est celui indiqué par la figure 8.

EXTENSION AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN CANAL.

Les divers résultats exposés plus haut, relatifs au mouvement d'un solide dans un fluide indéfini, sont susceptibles d'être étendus à un grand nombre de problèmes dont l'intégrale a la même forme (2) que celle du problème qu'on vient de traiter : je citerai notamment le problème des jets fluides issus de l'orifice d'un vase donné, le problème des jets limités par des lignes de glissement et rencontrant un obstacle donné, etc.

Beaucoup plus difficile est l'extension au cas d'un fluide, limité par des parois fixes, et contenant un obstacle donné. Ce dernier problème, comme aussi toute une catégorie d'autres que j'ai signalés dans ma Note du 24 avril 1911 aux *Comptes rendus*, peut être cependant abordé en utilisant les formules générales que j'ai démontrées ailleurs. Je me propose, dans ce qui va suivre, d'étudier spécialement le problème du mouvement d'un solide donné dans un canal rectiligne, le solide étant symétrique par rapport à l'axe du canal. Ce problème a été étudié tout d'abord par U. Cisotti (1), pour un obstacle formé de segments rectilignes, et j'ai donné (2) les formules générales qui permettent de trouver le mouvement correspondant à un solide dont le contour a une forme donnée. Renvoyant pour le détail de la théorie aux Mémoires cités ci-dessus, je rappelle seulement ici que tout le mouvement est déterminé, dans chaque cas, par la construction d'une fonction

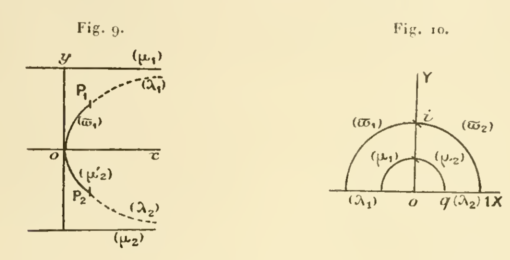
$$\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + i\,T(X, Y)$$

régulière dans une demi-couronne circulaire $q < |Z| < 1$, dans laquelle Θ et T ont la même signification que pour le problème du fluide indéfini : Θ est l'angle, avec Ox, de la vitesse V du fluide en un

(1) *Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1909.

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1912.

point (x, y), et e^τ est la grandeur de cette vitesse V. En désignant par $\Phi(\varepsilon)$ la valeur de l'angle que fait la tangente à la paroi du solide (dans le sens du courant) avec Ox, au point qui correspond à $Z = e^{i\varepsilon}\left(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$, la fonction $\Omega(Z)$ est déterminée par des formules que j'ai obtenues sous diverses formes, notamment les deux



suivantes (p. 377 et 378 de mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* cité), équivalentes dans la couronne circulaire :

$$(1) \qquad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\varepsilon)\frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - p\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}\,d\varepsilon$$

et

$$(2) \qquad \Omega(Z) = \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \Phi'(\varepsilon)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\,d\varepsilon$$
$$+ \frac{i}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\right]\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{2}\right)}$$
$$+ \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\log Z + 1\right)\Phi(\pi) \quad [1].$$

---

[1] Nous avons fait, en transcrivant cette dernière formule, $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$, valeur qu'impose ici la symétrie supposée. Voir *Annales de l'École Normale*, 1912, p. 144. On a de plus $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$, toujours à cause de cette symétrie. Enfin les demi-périodes des fonctions elliptiques sont ω_1 et ω_3.

Il y a, comme nous le savons, deux sortes de difficultés dans la solution effective du problème : l'une concernant les vitesses, l'autre la forme des lignes de glissement (ou, ce qui revient au même, concernant le fait que les frontières du domaine fluide dans le plan du mouvement, ne doivent pas se recouper).

Occupons-nous d'abord des vitesses, qui ne doivent nulle part dépasser la valeur 1 (valeur à l'infini). Comme on l'a montré au Chapitre I, il suffit de s'assurer que les vitesses ne dépassent pas l'unité sur les frontières ou encore que T est négatif (ou nul) sur les parois solides (μ et ϖ).

Pour tous les obstacles tels que $\Phi(\varepsilon)$ *soit négatif*, entre $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ (ce qui est le cas pour tous les obstacles qu'on peut être appelé à considérer naturellement), je dis que *les vitesses sont toujours acceptables sur les parois du canal.*

Pour le démontrer, nous partirons de la formule (1), dans laquelle nous ferons $Z = q e^{is}$ ou

$$\log Z = \log q + is = -\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} + is,$$

et nous nous placerons sur la paroi μ_2, en supposant $0 < s < \frac{\pi}{2}\cdot$ Il viendra

$$\Omega(qe^{is}) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\varepsilon)\frac{p'\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{p\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\,d\varepsilon.$$

On reconnaît sans peine que cette expression est imaginaire pure, de sorte que la valeur de T sur la paroi en question est

$$T_1(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(\varepsilon)\frac{p'\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{p\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\,d\varepsilon.$$

A cause de l'hypothèse de la symétrie, on a

$$\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon),$$

ce qui permet d'écrire, après un calcul facile,

$$
\begin{aligned}
T_1(s) = {} & \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon)\frac{p'\left(\omega_3+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{p\left(\omega_3+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)-p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}\,d\varepsilon \\
& -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon)\frac{p'\left(\omega_3+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{p\left(\omega_3+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)-p\left(\omega_1-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\,d\varepsilon,
\end{aligned}
$$

ou encore, après réductions évidentes, et en posant

$$
a=\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon, \qquad b=\frac{\omega_1}{\pi}s \qquad \left(0\leqq a\leqq\frac{\omega_1}{2},\ 0\leqq b\leqq\frac{\omega_1}{2}\right),
$$

$$
(3)\quad T_1(s)=\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon)\,p'(\omega_3+b)\frac{pa-p(\omega_1-a)}{[p(\omega_3+b)-pa][p(\omega_3+b)-p(\omega_1-a)]}\,d\varepsilon.
$$

Comme a et b sont tous deux compris entre o et $\frac{\omega_1}{2}$, la théorie de la fonction p nous permet maintenant d'affirmer qu'on a les inégalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
& pa-p(\omega_1-a)>0, \\
& p(\omega_3+\beta)-pa<0, \\
& p(\omega_3+\beta)-p(\omega_1-a)<0;
\end{aligned}
$$

d'autre part $p'(\omega_3+b)$ est positif. De sorte que la dernière expression obtenue pour T_1 nous montre cette quantité comme essentiellement négative, ce que nous voulions prouver.

Voyons maintenant ce qui concerne les vitesses sur les parois ϖ du solide, par exemple sur ϖ_2. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour les obstacles à bords concaves vers le courant, les vitesses sont toujours acceptables sur les parois du solide.

L'hypothèse entraîne de suite que, pour $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, $\Phi(\varepsilon)$ soit négative et croissante. Supposant bien entendu cette fonction dérivable, nous prendrons cette fois la fonction $\Omega(Z)$ sous la forme (2) qui (*Journal de Mathématiques*, 1911, p. 379 et suiv.) est encore valable sur les frontières du domaine où la fonction est définie. A cause de la

symétrie qui entraîne $\Phi'(\pi-\varepsilon)=-\Phi'(\varepsilon)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}P&=\int_0^{\pi}\Phi'(\varepsilon)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}d\varepsilon\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-\omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon+\omega_1\right)}d\varepsilon.\end{aligned}$$

d'où, à l'aide des formules (*Cf.* TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, XII, 3)

$$\begin{aligned}\sigma(a-\omega_1)&=-e^{-\eta_1 a}\sigma\omega_1\sigma_1 a,\\\sigma(a+\omega_1)&=e^{\eta_1 a}\sigma\omega_1\sigma_1 a.\end{aligned}$$

on tire facilement :

$$\text{Partie réelle de } P=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\left\{\log\left|\frac{\left[\dfrac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\right]}{\left[\dfrac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}\right]}\right|-2\eta_1\frac{\omega_1}{i\pi}\arg(\log Z)\right\}d\varepsilon.$$

Or il nous faut étudier les vitesses, c'est-à-dire le signe de T, sur une paroi ϖ_2; il nous faut donc examiner la valeur de T pour $Z=e^{is}\left(0<s<\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le calcul qu'on vient de faire, le coefficient de i dans Ω, pour $Z=e^{is}$, est

$$(4)\qquad T_1(s)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\left[\log\left|\frac{\dfrac{\sigma_1\frac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)}}{\dfrac{\sigma_1\frac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)}}\right|-2\eta_1\frac{\omega_1}{\pi}s\right]d\varepsilon$$

$$+\frac{2}{\pi}\alpha\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s\,\Phi(\pi),$$

en désignant par

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \pi),$$

l'angle que fait avec Ox, la tangente en O à la paroi supérieure ϖ_1.

Effectuons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\,\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\,s\,d\varepsilon,$$

et remarquons que la fonction

$$\frac{\dfrac{\sigma_1\left[\dfrac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)\right]}{\sigma\left[\dfrac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)\right]}}{\dfrac{\sigma_1\left[\dfrac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)\right]}{\sigma\left[\dfrac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)\right]}} = \frac{\xi_{10}\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)}{\xi_{10}\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)} = \frac{\sqrt{p\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)-e_1}}{\sqrt{p\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)-e_1}}$$

est réelle (non toujours positive) pour les valeurs considérées de s et ε. On met alors T_1 sous la forme

$$\text{(5)} \qquad T_1(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\log\left|\frac{\sqrt{p\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)-e_1}}{\sqrt{p\,\dfrac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)-e_1}}\right| d\varepsilon$$

$$-\frac{2\alpha}{\pi}\left[\log\frac{\sigma\left(\dfrac{\omega_1}{2}+\dfrac{\omega_1}{\pi}s\right)}{\sigma\left(\dfrac{\omega_1}{2}-\dfrac{\omega_1}{\pi}s\right)} - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s\right].$$

Ceci étant, on a par hypothèse, dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$,

$$\Phi'(\varepsilon) > 0,$$

et l'on a aussi, quels que soient ε et s dans le même intervalle,

$$p\,\frac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon) > p\,\frac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon) > e_1;$$

par suite

$$\log\left|\frac{\sqrt{p\frac{\omega_1}{\pi}(s+\varepsilon)-e_1}}{\sqrt{p\frac{\omega_1}{\pi}(s-\varepsilon)-e_1}}\right|<0.$$

Il en résulte que la première partie de l'expression de T_1 est essentiellement négative. Je dis qu'il en est de même de la seconde. A cet effet, il faut montrer que la fonction

$$I(s)=\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2}-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}-\frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s$$

est toujours positive dans l'intervalle o, $\frac{\pi}{2}$.

Les valeurs extrêmes de I sont o et $+\infty$ pour $s=0$ et $\frac{\pi}{2}$ respectivement; puis on a facilement

$$\frac{dI}{ds}=\frac{\omega_1}{\pi}\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)+\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right]-\frac{\eta_1\omega_1}{\pi},$$

$$\frac{d^2I}{ds^2}=\frac{\omega_1^2}{\pi^2}\left[-p\left(\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_1}{\pi}s\right)+p\left(\frac{\omega_1}{2}-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right].$$

Cette dérivée seconde étant visiblement positive, tout se ramène donc à faire voir que $\frac{dI}{ds}$ reste positif, c'est-à-dire qu'il est positif pour $s=0$, ou encore qu'on a

$$\frac{\omega_1}{\pi}\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2}-\eta_1\right)>0.$$

Or ce fait résulte de ce que la fonction auxiliaire

$$J(s)=\zeta\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\eta_1}{\pi}s$$

est positive pour $s=\frac{\pi}{2}$, comme nous allons le montrer. La dérivée

$$\frac{dJ}{ds}=-\frac{\omega_1}{\pi}p\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\eta_1}{\pi}$$

est croissante dans l'intervalle o, $\frac{\pi}{2}$, depuis $-\infty$ jusqu'à la valeur

$$-\frac{1}{\pi}(e_1\omega_1+\eta_1),$$

qui (Tannery et Molk, XXX, 1) est négative; donc $J(s)$ décroît, et, comme sa valeur finale est zéro pour $s=\pi$, il en résulte bien que $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est positif.

Le même fait résulte aussi, d'ailleurs, de la formule qu'on établirait facilement

$$2\zeta\frac{\omega_1}{2}-\eta_1=-\frac{1}{2}\,\frac{p'\frac{\omega_1}{2}}{p\frac{\omega_1}{2}-e_1}.$$

Dans ces conditions $I(s)$, étant croissante, est toujours positive, ce que nous voulions établir.

Il en résulte enfin que $T_1(s)$ est essentiellement négatif et que, par suite, les vitesses sur les parois solides sont partout inférieures à 1; d'où le théorème énoncé.

De ce qui précède résulte notamment que, pour tous les obstacles concaves vers le courant, il ne se présente aucune difficulté relative aux vitesses, qui sont partout acceptables.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Pour tous les obstacles concaves vers le courant (dès que la tangente à la paroi de l'obstacle reste, sur ϖ_1, entre o et $\frac{3\pi}{2}$), *les lignes de jet sont toujours acceptables.*

Ceci va résulter du fait que la courbure d'une ligne de jet ne change pas de signe dans les conditions énoncées, la tangente à la ligne de jet varie continuellement, toujours dans le même sens, depuis la position tangente au départ, au bord de la paroi solide, jusqu'à la position horizontale (à l'infini). Les frontières du fluide en mouvement ne se recoupent donc nulle part. Comme Ω est réel le long des lignes de jet ($T=0$ par construction), nous allons donc faire voir que, dans l'in-

tervalle o, $\frac{\pi}{2}$, les hypothèses

$$\Phi(\varepsilon) < 0, \qquad \Phi'(\varepsilon) > 0,$$

entraînent que $\frac{d\Omega}{dZ}$ soit négatif quand Z varie entre q et 1.

De la formule (2) nous tirons tout d'abord

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{\pi^2 Z}\int_0^{\pi}\Phi'(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon \\ + \frac{2\alpha\omega_1}{\pi^2 Z}\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{2}\right)\right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2 Z}\Phi(\pi),\end{aligned}$$

ce qui se laisse assez facilement mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{\pi^2 Z}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\Bigg[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{i\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) \\ + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - \omega_1\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \omega_1\right)\Bigg]d\varepsilon \\ + \frac{2\omega_1}{\pi^2 Z}\left\{\alpha\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{2}\right)\right] + \eta_1\Phi(\pi)\right\}.\end{aligned}$$

Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z = u, \qquad \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon = \beta,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{\pi^2 Z}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\left[\zeta(u-\beta) - \zeta(u+\beta) + \zeta(u+\beta-\omega_1) - \zeta(u-\beta+\omega_1)\right]d\varepsilon \\ + \frac{2\omega_1}{\pi^2 Z}\left\{\alpha\left[\zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)\right] + \eta_1\Phi(\pi).\right.\end{aligned}$$

Ceci posé, utilisons les formules (Tannery et Molk, VII, 9),

$$\zeta(u+\beta-\omega_1) - \zeta(u+\beta) = -\eta_1 + \frac{1}{2}\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1},$$

$$\zeta(u-\beta+\omega_1) - \zeta(u-\beta) = \quad \eta_1 + \frac{1}{2}\frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}.$$

Le coefficient de $\Phi'(\varepsilon)$ sous le signe d'intégration devient

$$-2\eta_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{p(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}\right].$$

Effectuant l'intégration portant sur le terme constant $-2\eta_1$ de cette dernière expression, et réduisant, on trouve immédiatement

$$(6)\qquad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 Z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\left[\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$
$$+\frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 Z}\left[\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)-\zeta\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)+\eta_1\right].$$

Je vais faire voir que, séparément, le coefficient de $\Phi(\varepsilon)$ dans l'intégrale, et le coefficient de α dans le second terme, sont négatifs, ce qui démontrera le théorème.

Introduisons les fonctions elliptiques ξ_{pq}. On sait qu'on a (Tannery et Molk, LIX et LXIII)

$$\frac{p'a}{pa-e_1} = -\frac{2\xi_{20}a\,\xi_{30}a}{\xi_{10}a}.$$

Par suite le coefficient de $\Phi'(\varepsilon)$ peut s'écrire

$$2\left[\frac{\xi_{20}(u-\beta)\,\xi_{30}(u-\beta)}{\xi_{10}(u-\beta)} - \frac{\xi_{20}(u+\beta)\,\xi_{30}(u+\beta)}{\xi_{10}(u+\beta)}\right]$$
$$= \frac{2}{\xi_{10}(u+\beta)\,\xi_{10}(u-\beta)}\left[\begin{matrix}\xi_{10}(u+\beta)\,\xi_{20}(u-\beta)\,\xi_{30}(u-\beta)\\ -\xi_{10}(u-\beta)\,\xi_{20}(u+\beta)\,\xi_{30}(u+\beta)\end{matrix}\right].$$

Comme, dans les conditions énoncées plus haut, $u+\beta$ et $u-\beta$ sont imaginaires conjuguées, au signe près, et comme la fonction ξ_{10} est impaire, le produit

$$\xi_{10}(u+\beta)\,\xi_{10}(u-\beta)$$

est essentiellement négatif, et nous sommes d'abord ramenés à chercher si l'expression

$$(7)\quad \xi_{10}(u+\beta)\,\xi_{20}(u-\beta)\,\xi_{30}(u-\beta) - \xi_{10}(u-\beta)\,\xi_{20}(u+\beta)\,\xi_{30}(u+\beta)$$

ne serait pas positive.

Rappelons que, d'après les hypothèses, β varie entre 0 et $\frac{\omega_1}{2}$, et u

entre o et ω_3, en restant imaginaire pure (puisque Z varie entre 1 et q). Dans ces conditions, l'expression (7), considérée comme fonction de u, soit $P(u)$, reste continue, et sa dérivée a pour valeur

$$P'(u) = \xi_{10}(u-\beta)\,\xi_{10}(u+\beta)\left[\xi_{20}^2(u+\beta)+\xi_{30}^2(u+\beta) - \xi_{20}^2(u-\beta) - \xi_{30}^2(u-\beta)\right],$$

à cause de la formule connue (*T.* et *M.*, LXI, 1).

$$\xi'_{\alpha 0}(u) = -\xi_{\beta 0}(u)\,\xi_{\gamma 0}(u).$$

Remplaçant maintenant les carrés des fonctions ξ au moyen de la fonction p, réduisant et observant que le produit $\xi_{10}(u-\beta)\,\xi_{10}(u+\beta)$ est négatif, il vient ainsi

$$\frac{1}{i}\frac{dP}{du} = \operatorname{Sgn}\frac{2}{i}\left[p(u-\beta) - p(u+\beta)\right].$$

Or cette dernière quantité, réelle et continue, ne change certainement pas de signe quand u et β restent dans les limites indiquées; pour obtenir ce signe constant, je puis supposer $\frac{u}{i}$ et β positifs et très petits; alors la quantité en question devient très grande, et sa partie principale est

$$\frac{2}{i}\left[\frac{1}{(u-\beta)^2} - \frac{1}{(u+\beta)^2}\right] = \frac{8u\beta}{i(u^2-\beta^2)^2} > 0.$$

Par suite $P(u)$ décroît quand $\frac{u}{i}$ croît. Or, les valeurs extrêmes de P sont, pour $u = 0$,

$$P(0) = 2\,\xi_{10}\beta\,\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta,$$

quantité positive, et pour $u = \omega_3$,

$$P(\omega_3) = \xi_{10}(\omega_3+\beta)\,\xi_{20}(\omega_3-\beta)\,\xi_{30}(\omega_3-\beta) - \xi_{10}(\omega_3-\beta)\,\xi_{20}(\omega_3+\beta)\,\xi_{30}(\omega_3+\beta).$$

Mais on a (*T.* et *M.*, LX, 3 et 4)

$$\xi_{10}(\omega_3-\beta) = -\xi_{10}(\beta-\omega_3) = \xi_{10}(\beta+\omega_3),$$
$$\xi_{20}(\omega_3-\beta) = -\xi_{20}(\beta-\omega_3) = \xi_{20}(\beta+\omega_3),$$
$$\xi_{30}(\omega_3-\beta) = -\xi_{30}(\beta-\omega_3) = -\xi_{30}(\beta+\omega_3),$$

et par suite (*T.* et *M.*, LXIII et VII, 9)

$$P(\omega_3) = -2\xi_{10}(\omega_3+\beta)\xi_{20}(\omega_3+\beta)\xi_{30}(\omega_3+\beta) = p'(\omega_3+\beta)$$
$$= -\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)p'\beta}{(p\beta-e_3)^2}.$$

Ceci est encore positif, puisque $p'\beta$ est négatif.

Donc le coefficient de $\Phi'(\varepsilon)$ dans l'intégrale est bien négatif, et le premier terme de $\frac{d\Omega}{dZ}$ est aussi négatif.

Voyons maintenant le second terme; son signe est celui de l'expression

$$R = \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1,$$

qu'on mettra facilement sous la forme

$$R = \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2} + \omega_1\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_1,$$

ou encore (*T.* et *M.*, VII, 9)

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1}.$$

Cette quantité étant réelle, on a encore

$$R = \frac{1}{4}\left[\frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} - \frac{p'\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1}\right],$$

et sous cette forme on retombe sur un cas particulier d'une expression étudiée précédemment, et qu'on a montrée être négative; le théorème est donc démontré : $\frac{d\Omega}{dZ}$ est négatif.

Avant d'aller plus loin, je vais maintenant établir un résultat important. Si l'on pose

$$Z = \rho e^{i s},$$

on aura sur la frontière extérieure $|Z| = 1$,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d\Theta}{d\rho}.$$

Comme la vitesse (égale à 1 au point de raccord d'une ligne de jet avec une paroi solide) ne doit pas devenir supérieure à 1, il faut que $\frac{dT}{ds}$ commence par être négatif pour $s = 0$, et par suite que la dérivée normale $\frac{d\Theta}{d\rho}$ soit aussi négative au point $Z = 1$. On s'assure aisément que cette condition équivaut au fait que la ligne de jet doit être convexe vers le fluide en mouvement, au départ du solide. Calculons donc $\frac{d\Theta}{d\rho}$ au point en question; ou plus précisément, calculons la dérivée $\frac{d\Theta}{d\rho} = \frac{d\Omega}{d\rho}$, pour Z réel positif, et cherchons la limite de cette dérivée quand Z tend vers 1.

Or on a trouvé précédemment, après quelques transformations [form. (6)],

$$(8)\qquad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 Z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\left[\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$
$$+ \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 Z}\left[\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1\right].$$

Par un calcul et des transformations tout semblables, et que je ne reproduis pas, on trouvera de même, pour la dérivée $\frac{d\Omega}{d\rho}$ au point $Z = \rho e^{is}$,

$$\frac{d\Omega}{d\rho} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 \rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\left[\frac{p'(\nu+\beta)}{p(\nu+\beta)-e_1} - \frac{p'(\nu-\beta)}{p(\nu-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$
$$+ \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 \rho}\left[\zeta\left(\nu-\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\nu+\frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1\right],$$

mais en posant, ici,

$$\nu = \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s, \qquad \beta = \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon.$$

Si dans cette formule on fait tendre ρ vers 1, l'intégrale qui y

figure n'a généralement pas de sens; mais, avant de passer à la limite, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\left[\frac{p'(\nu+\beta)}{p(\nu+\beta)-e_1}-\frac{p'(\nu-\beta)}{p(\nu-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)]\left[\cdots\right]d\varepsilon+\Phi'(s)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cdots\right]d\varepsilon.$$

Le coefficient de $\Phi'(s)$ est (*T.* et *M.*, VII, 9)

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\zeta(\nu+\beta+\omega_1)-\zeta(\nu+\beta)-\zeta(\nu-\beta+\omega_1)+\zeta(\nu-\beta)]\,d\varepsilon$$

ou bien

$$\frac{2\pi}{\omega_1}\left[\log\frac{\sigma(\nu+\beta+\omega_1)\,\sigma(\nu-\beta+\omega_1)}{\sigma(\nu+\beta)\,\sigma(\nu-\beta)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou encore

$$\frac{2\pi}{\omega_1}\log\frac{\sigma\left(\nu+\frac{3\omega_1}{2}\right)\sigma^2\nu}{\sigma\left(\nu-\frac{\omega_1}{2}\right)\sigma^2(\nu+\omega_1)}.$$

Or on a (*T.* et *M.*, XII, 2 et 3)

$$\sigma\left(\nu+\frac{3\omega_1}{2}\right)=-e^{2\eta_1\left(\nu+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma\left(\nu-\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\sigma(\nu+\omega_1)\quad=e^{\eta_1\nu}\sigma\omega_1\sigma_1\nu.$$

Donc l'expression ci-dessus devient

$$\frac{2\pi}{\omega_1}\log\left(\frac{-e^{\eta_1\omega_1}\sigma^2\nu}{\sigma^2\omega_1\sigma_1^2\nu}\right)=\frac{2\pi}{\omega_1}\left[\eta_1\omega_1-2\log\sigma\omega_1-\log\frac{\sigma_1^2\nu}{\sigma^2\nu}+(2\lambda+1)i\pi\right]$$

en désignant par λ un nombre entier dont la valeur n'importera pas.

Cela posé, on voit qu'on peut écrire, en faisant tendre s vers zéro, et en supposant que $\Phi'(s)$ tende alors vers une limite (finie ou infinie),

que nous désignerons par $\Phi'(+0)$,

$$\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0} = \frac{\omega_1}{2\pi^2\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\Phi(\varepsilon)-\Phi'(+0)]\left[\frac{p'(\nu+\beta)}{p(\nu+\beta)-e_1}-\frac{p'(\nu-\beta)}{p(\nu-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$
$$+\frac{\Phi'(+0)}{\pi\rho}\left[\eta_1\omega_1-2\log\sigma\omega_1-\log\frac{\sigma_1^2\nu}{\sigma^2\nu}+(2\lambda+1)i\pi\right]$$
$$+\frac{2\alpha\omega_1}{\pi^2\rho}\left[\zeta\left(\nu-\frac{\omega_1}{2}\right)-\zeta\left(\nu+\frac{\omega_1}{2}\right)+\eta_1\right],$$

ν désignant maintenant $\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho$, et l'entier λ étant tel que le coefficient de $\Phi(+0)$ soit réel.

On aperçoit alors que l'intégrale qui figure dans l'expression précédente a en général une limite bien déterminée quand ρ tend vers 1. Mais le coefficient de $\Phi'(+0)$ dans la partie intégrée devient infini négatif dans les mêmes conditions (ν devenant nul). Si donc $\Phi'(+0)$ est positif, la valeur limite de $\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{z=1}$ est infinie négative, et il n'y a pas de condition nouvelle à écrire. (C'est le cas notamment pour les parois concaves vers le fluide en mouvement, et pour lesquelles on a partout sur ϖ_2, $\Phi'(\varepsilon) > 0$.)

Si au contraire $\Phi'(+0)$ est négatif, $\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{z=1}$ est positif et la solution correspondante est par suite inacceptable. D'où ce théorème :

Il est nécessaire que $\Phi'(+0)$ soit positif ou nul pour que la solution correspondante soit acceptable.

Dans le cas où $\Phi'(+0)=0$, il est, de plus, nécessaire que la valeur limite restante pour $\frac{d\Omega}{d\rho}$ soit négative ou nulle, ce qui donne la condition

$$\text{(I)} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\frac{p'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{p\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-e_1}d\varepsilon+2\alpha\left(\eta_1-2\zeta\frac{\omega_1}{2}\right)\leqq 0.$$

Le cas des *proues* correspond au cas limite où cette inégalité se transforme en égalité. En effet, si l'inégalité est vérifiée, il résulte d'une démonstration que j'ai donnée ailleurs [*Sur le mouvement d'un*

liquide dans un canal renfermant un obstacle (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XXIX, p. 127-197); *voir* p. 170], que les lignes de jet se détachent des parois solides avec un rayon de courbure nul. Pour qu'on ait affaire à une proue véritable, d'où les jets se détachent avec un rayon de courbure fini, l'inégalité (I) doit donc se transformer en égalité.

On peut alors montrer, dans ce cas, que le rayon de courbure des lignes de jet aux points de détachement d'avec le solide est égal au rayon de courbure des parois solides aux mêmes points. Le calcul est analogue à celui qu'on a développé ici page 260.

Utilisant les résultats précédents, nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant :

Pour tous les obstacles convexes vers le courant, jusque et y compris le cas des proues, la condition nécessaire (I) *suffit à assurer des lignes de jet partout acceptables*, c'est-à-dire partout convexes vers le fluide en mouvement.

Par hypothèse, dans l'intervalle o, $\frac{\pi}{2}$, $\Phi(\varepsilon)$ est négatif et décroissant; dans l'inégalité (I) où $\wp'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon$ est négatif et $\wp\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - e_1$ positif, l'intégrale est positive; d'autre part, nous avons déjà vu plus haut que $2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1$ est positif; on peut donc écrire, avec les deux membres positifs,

$$2\alpha\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right) \geqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\frac{\wp'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - e_1}\,d\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$(9)\qquad 2\alpha\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right) = \mathrm{K}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)\frac{\wp'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\wp\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - e_1}\,d\varepsilon,$$

en désignant par K un nombre *plus grand que* 1, *ou égal à* 1 dans le cas limite d'une proue.

Ceci posé, il nous faut démontrer que, le long d'une ligne de jet, λ_2 par exemple, la convexité est toujours vers le fluide en mouvement; cela revient à dire que $\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0}$ doit être négatif, quel que soit ρ entre q et 1. Or, entre ces limites, on a [form. (6) ou (8)], en posant

encore

$$u = \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon,$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0} = \frac{\omega_1}{2\pi^2\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\left[\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}\right]d\varepsilon$$
$$+ \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2\rho}\left[\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1\right].$$

Par suite, en éliminant α entre cette égalité et l'égalité (9) qu'on vient d'écrire,

$$(10)\quad \frac{\pi^2\rho}{\omega_1}\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right)\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\left\{\frac{1}{2}\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right)\left[\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}\right]\right.$$
$$\left. + K\left[\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1\right]\frac{p'\beta}{p\beta - e_1}\right\} d\varepsilon.$$

Je vais faire voir que cette intégrale est négative.

A cet effet, je démontrerai que le coefficient de $\Phi'(\varepsilon)$ dans le second membre, coefficient qui se présente comme une différence de deux quantités positives, est toujours positif quels que soient u et β dans les intervalles que l'on sait. Appelons S ce coefficient, je vais d'abord le transformer par l'introduction des fonctions ξ_{pq}. On a vu déjà (*cf.* p. 275) qu'on avait

$$\frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1}$$
$$= -2\left[\frac{\xi_{20}(u+\beta)\,\xi_{30}(u+\beta)}{\xi_{10}(u+\beta)} - \frac{\xi_{20}(u-\beta)\,\xi_{30}(u-\beta)}{\xi_{10}(u-\beta)}\right],$$

de même (p. 277) on a

$$\zeta\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{p'\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)-e_1} = \frac{1}{4}\left[\frac{p'\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)-e_1} - \frac{p'\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)-e_1}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\xi_{20}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)\xi_{30}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}{\xi_{10}\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)} - \frac{\xi_{20}\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)\xi_{30}\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)}{\xi_{10}\left(u-\frac{\omega_1}{2}\right)}\right],$$

puis

$$\frac{p'\beta}{p\beta - e_1} = -2\frac{\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta}{\xi_{10}\beta},$$

et enfin on a aisément

$$2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\dfrac{\omega_1}{2}}{p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1} = \frac{\xi_{20}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}\dfrac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\dfrac{\omega_1}{2}},$$

de sorte que l'expression S prend la forme

$$(11)\quad S = -\frac{\xi_{20}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}\dfrac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\dfrac{\omega_1}{2}}\left[\frac{\xi_{20}(\beta+u)\,\xi_{30}(\beta+u)}{\xi_{10}(\beta+u)} + \frac{\xi_{20}(\beta-u)\,\xi_{30}(\beta-u)}{\xi_{10}(\beta-u)}\right]$$

$$+ K\frac{\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta}{\xi_{10}\beta}$$

$$\times\left[\frac{\xi_{20}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{30}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)}{\xi_{10}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)} + \frac{\xi_{20}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)\xi_{30}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)}{\xi_{10}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)}\right].$$

Observons que les facteurs placés devant les deux crochets sont réels, et que le premier crochet est la somme de deux imaginaires conjuguées; il en est de même du second crochet, mais, dans ce dernier cas, les deux imaginaires conjuguées en question sont toutes deux égales à la quantité, évidemment réelle,

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right) - \eta_1.$$

Cela étant, l'inégalité $S > 0$ serait certainement exacte si les deux inégalités suivantes

$$\left|\frac{\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta\,\xi_{20}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{30}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)}{\xi_{10}\beta\,\xi_{10}\left(\dfrac{\omega_1}{2}+u\right)}\right| > \left|\frac{\xi_{20}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{20}(\beta+u)\,\xi_{30}(\beta+u)}{\xi_{10}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{10}(\beta+u)}\right|,$$

$$\left|\frac{\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta\,\xi_{20}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)\xi_{30}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)}{\xi_{10}\beta\,\xi_{10}\left(\dfrac{\omega_1}{2}-u\right)}\right| > \left|\frac{\xi_{20}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{20}(\beta-u)\,\xi_{30}(\beta-u)}{\xi_{10}\dfrac{\omega_1}{2}\,\xi_{10}(\beta-u)}\right|,$$

qui se réduisent d'ailleurs à une seule, étaient démontrées. Or ces

inégalités sont équivalentes à

$$\left|\frac{\xi_{20}(\beta+u)\,\xi_{30}(\beta+u)\,\xi_{10}\beta}{\xi_{10}(\beta+u)\,\xi_{20}\beta\,\xi_{30}\beta}\right| < \left|\frac{\xi_{20}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{20}\frac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}\frac{\omega_1}{2}}\right|$$

ou bien encore à

$$\frac{\xi_{10}^2\beta}{\xi_{20}^2\beta\,\xi_{30}^2\beta}\,\frac{\xi_{20}(\beta+u)\,\xi_{20}(\beta-u)\,\xi_{30}(\beta+u)\,\xi_{30}(\beta-u)}{\xi_{10}(\beta+u)\,\xi_{10}(\beta-u)}$$
$$< \frac{\xi_{10}^2\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{30}^2\frac{\omega_1}{2}\,\xi_{30}^2\frac{\omega_1}{2}}\,\frac{\xi_{20}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{20}\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{2}-u\right)}.$$

Comme le second membre de cette dernière ne diffère du premier que par le fait que β y est remplacé par $\frac{\omega_1}{2}$, et comme β est inférieur à $\frac{\omega_1}{2}$ nous nous trouvons ramenés à montrer que la fonction de β,

$$(12)\qquad P(\beta) = \frac{\xi_{10}^2\beta}{\xi_{20}^2\beta\,\xi_{30}^2\beta}\,\frac{\xi_{20}(\beta+u)\,\xi_{20}(\beta-u)\,\xi_{30}(\beta+u)\,\xi_{30}(\beta-u)}{\xi_{10}(\beta+u)\,\xi_{10}(\beta-u)},$$

est croissante dans l'intervalle $0, \frac{\omega_1}{2}$. Utilisant la formule (*T.* et *M.*, LXV, 1)

$$\xi_{0\gamma}(a+b)\,\xi_{0\gamma}(a-b) = \frac{\xi_{0\gamma}^2 a - \xi_{0\gamma}^2 b}{1-(e_\gamma-e_\alpha)(e_\gamma-e_\beta)\,\xi_{0\gamma}^2 a\,\xi_{0\gamma}^2 b},$$

nous transformerons d'abord P comme il suit :

$$P(\beta) = \frac{\xi_{10}^2\beta}{\xi_{20}^2\beta\,\xi_{30}^2\beta}\,\frac{1-(e_2-e_1)(e_2-e_3)\,\xi_{02}^2\beta\,\xi_{02}^2 u}{\xi_{02}^2\beta-\xi_{02}^2 u}$$
$$\times\frac{1-(e_3-e_1)(e_3-e_2)\,\xi_{03}^2\beta\,\xi_{03}^2 u}{\xi_{03}^2\beta-\xi_{03}^2 u}\,\frac{\xi_{01}^2\beta-\xi_{01}^2 u}{1-(e_1-e_2)(e_1-e_3)\,\xi_{01}^2\beta\,\xi_{01}^2 u}$$

ou encore

$$P(\beta) = \frac{1+(e_1-e_2)(e_2-e_3)\,\xi_{02}^2 u\,\xi_{12}^2\beta}{1-\xi_{02}^2 u\,\xi_{20}^2\beta}$$
$$\times\frac{1-(e_1-e_3)(e_2-e_3)\,\xi_{03}^2 u\,\xi_{13}^2\beta}{1-\xi_{03}^2 u\,\xi_{30}^2\beta}\,\frac{1-\xi_{01}^2 u\,\xi_{10}^2\beta}{1-(e_1-e_2)(e_1-e_3)\,\xi_{01}^2 u\,\xi_{01}^2\beta}.$$

Exprimons toutes les fonctions de β au moyen de $\xi_{10}\beta$, en nous servant des formules

$$e_1+\xi_{10}^2\beta = e_2+\xi_{20}^2\beta = e_3+\xi_{30}^2\beta\,(=p\beta).$$

Il vient simplement

$$(13)\quad \mathrm{P}(\beta) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\xi^2_{10}\beta\,\{(e_1-e_2)[1+(e_2-e_3)\xi^2_{02}u]+\xi^2_{10}\beta\}\\ \quad\times\{(e_1-e_3)[1-(e_2-e_3)\xi^2_{03}u]+\xi^2_{10}\beta\}[1-\xi^2_{01}u\,\xi^2_{10}\beta]\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}(e_1-e_2+\xi^2_{10}\beta)(e_1-e_3+\xi^2_{10}\beta)[1-(e_1-e_2)\xi^2_{02}u-\xi^2_{02}u\,\xi^2_{10}\beta]\\ \quad\times[1-(e_1-e_3)\xi^2_{03}u-\xi^2_{03}u\,\xi^2_{10}\beta][\xi^2_{10}\beta-(e_1-e_2)(e_1-e_3)\xi^2_{01}u]\end{array}\right\}}.$$

Or on a (*T.* et *M.*, LIX, 6)

$$\begin{aligned}1+(e_2-e_3)\xi^2_{02}u &= \xi^2_{32}u,\\ 1-(e_2-e_3)\xi^2_{03}u &= \xi^2_{23}u,\\ 1-(e_1-e_2)\xi^2_{02}u &= \xi^2_{12}u,\\ 1-(e_1-e_3)\xi^2_{03}u &= \xi^2_{13}u,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\xi^2_{12}u-\xi^2_{02}u\,\xi^2_{10}\beta &= \xi^2_{02}u(\xi^2_{10}u-\xi^2_{10}\beta),\\ \xi^2_{13}u-\xi^2_{03}u\,\xi^2_{10}\beta &= \xi^2_{03}u(\xi^2_{10}u-\xi^2_{10}\beta).\end{aligned}$$

Remplaçant et simplifiant, il reste .

$$(14)\quad \begin{aligned}\mathrm{P}_1(\beta) &= \mathrm{P}(\beta)\left(\frac{\xi^2_{02}u\,\xi^2_{03}u}{-\xi^2_{01}u}\right)\\ &= \frac{\xi^2_{10}\beta[\xi^2_{10}\beta+(e_1-e_2)\xi^2_{32}u][\xi^2_{10}\beta+(e_1-e_3)\xi^2_{23}u]}{\left\{\begin{array}{l}(\xi^2_{10}\beta+e_1-e_2)(\xi^2_{10}\beta+e_1-e_3)(\xi^2_{10}\beta-\xi^2_{10}u)\\ \quad\times[\xi^2_{10}\beta-(e_1-e_2)(e_1-e_3)\xi^2_{01}u]\end{array}\right\}},\end{aligned}$$

le quotient mis en évidence comme facteur de $\mathrm{P}(\beta)$ étant indépendant de β et positif.

La fonction $\mathrm{P}_1(\beta)$ étant ainsi préparée, séparons l'expression obtenue en deux facteurs, de la façon suivante :

$$(15)\quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2\times\mathrm{P}_3$$

avec

$$(16)\quad \begin{aligned}\mathrm{P}_2 &= \frac{\xi^2_{10}\beta}{(\xi^2_{10}\beta-\xi^2_{10}u)[\xi^2_{10}\beta-(e_1-e_2)(e_1-e_3)\xi^2_{01}u]}\\ &= \frac{t}{t^2-t[\xi^2_{10}u+(e_1-e_2)(e_1-e_3)\xi^2_{01}u]+(e_1-e_2)(e_1-e_3)},\end{aligned}$$

$$(17)\quad \begin{aligned}\mathrm{P}_3 &= \frac{[\xi^2_{10}\beta+(e_1-e_2)\xi^2_{32}u][\xi^2_{10}\beta+(e_1-e_3)\xi^2_{23}u]}{(\xi^2_{10}\beta+e_1-e_2)(\xi^2_{10}\beta+e_1-e_3)}\\ &= \frac{t^2+[(e_1-e_2)\xi^2_{32}u+(e_1-e_3)\xi^2_{23}u]t+(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{t^2+3e_1t+(e_1-e_2)(e_1-e_3)},\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$t = \xi_{10}^2 \beta.$$

Cette variable t, lorsque β varie de zéro à $\frac{\omega_1}{2}$, varie en décroissant depuis $+\infty$ jusqu'à $(e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3})^2$.

On reconnaît sans peine que P_2 est une fonction décroissante de t, et par suite une fonction décroissante de β; de plus, il est visiblement positif.

Quant à P_3, qui est aussi positif, sa dérivée par rapport à t, a le signe de

$$[(e_1 - e_2)\xi_{32}^2 u + (e_1 - e_3)\xi_{23}^2 u - 3e_1][(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) - t^2].$$

Le second facteur reste négatif dans l'intervalle de variation de t; quant au premier facteur, on peut l'écrire sous la forme

$$(e_1 - e_2)\xi_{32}^2 u + (e_1 - e_3)\xi_{23}^2 u - (e_1 - e_2) - (e_1 - e_3),$$

ou encore

$$(e_1 - e_2)(\xi_{32}^2 u - 1) + (e_1 - e_3)(\xi_{23}^2 u - 1)$$

et, par suite,

$$(e_1 - e_2)\frac{e_2 - e_3}{pu - e_2} + (e_1 - e_3)\frac{e_3 - e_2}{pu - e_3},$$

ou enfin après réduction

$$(e_2 - e_3)^2 \frac{e_1 - pu}{(pu - e_2)(pu - e_3)}.$$

Or cette quantité est essentiellement positive quel que soit u dans l'intervalle 0, ω_3, puisque alors pu est inférieur à e_3. Donc P_3 est une fonction de t décroissante et par suite une fonction de β croissante.

Enfin le produit $P_2 P_3$ est une fonction croissante de β, et la fonction $P(\beta)$ également, ce qu'il fallait démontrer.

Restant encore dans le cas des proues convexes, la condition (I) est-elle suffisante pour écarter également la difficulté relative aux vitesses; autrement dit, suffit-elle à assurer la validité de la solution? Je me propose de montrer qu'il n'en est rien, quelque probable que le fait paraisse cependant *a priori*. Je ferai voir, à cet effet, qu'on peut trouver un point $Z = \rho e^{is}$ (ρ étant voisin de 1, mais inférieur à 1) et des fonctions $\Phi(\varepsilon)$ satisfaisant à la condition (I), avec, bien entendu, $\Phi < 0$, $\Phi'(\varepsilon) < 0$, donnant naissance à une solution pour laquelle T

serait positif, c'est-à-dire la vitesse plus grande que 1, au point considéré.

Partons de la formule (1) et posons

$$Z = \rho e^{is},$$

on a immédiatement

$$\begin{aligned}T = \frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\Phi(\varepsilon)\Big[\quad & \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right)\\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right)\\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right)\\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right)\Big]\,d\varepsilon,\end{aligned}$$

ou mieux, puisque l'hypothèse $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$ entraîne

$$\int_0^{\pi}\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 0,$$

et en posant

$$\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho = u,$$

$$\begin{aligned}T = \frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\Phi(\varepsilon)\Big[\quad & \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + u\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + u\right)\\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - u\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - u\right)\Big]\,d\varepsilon.\end{aligned}$$

Un calcul simple, basé sur la même hypothèse, conduit à transformer cette expression en la suivante :

$$\begin{aligned}T = \frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varepsilon)\big[\quad & \zeta(a+u) + \zeta(b+u) + \zeta(a-u) + \zeta(b-u)\\ & - \zeta_1(a+u) - \zeta_1(b+u) - \zeta_1(a-u) - \zeta_1(b-u)\big]\,d\varepsilon,\end{aligned}$$

en posant

$$a = \frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon,$$

$$b = \frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon,$$

et en utilisant des formules telles que

$$\zeta(a + u - \omega_1) = \zeta_1(a + u) - \eta_1.$$

Appelons $Q(\varepsilon)$ le coefficient de $\Phi(\varepsilon)$ sous le signe somme; on a (*T.* et *M.*, LXIII, 5)

$$\zeta(a+u)-\zeta_1(a+u)=-\frac{1}{2}\frac{p'(a+u)}{p(a+u)-e_1}, \qquad \ldots,$$

et par suite

$$\begin{aligned}Q(\varepsilon)=&-\frac{1}{2}\frac{p'(a+u)}{p(a+u)-e_1}-\frac{1}{2}\frac{p'(a-u)}{p(a-u)-e_1}\\&-\frac{1}{2}\frac{p'(b+u)}{p(b+u)-e_1}-\frac{1}{2}\frac{p'(b-u)}{p(b-u)-e_1}.\end{aligned}$$

Donc $Q(\varepsilon)d\varepsilon$ est la différentielle de la fonction

$$\begin{aligned}R(\varepsilon)&=-\frac{\pi}{2\omega_1}\log\frac{[p(a+u)-e_1][p(a-u)-e_1]}{[p(b+u)-e_1][p(b-u)-e_1]}\\&=-\frac{\pi}{\omega_1}\log\frac{\xi_{10}(a+u)\xi_{10}(a-u)}{\xi_{10}(b+u)\xi_{10}(b-u)}.\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$T=\frac{\omega_1}{2\pi^2}[\Phi(\varepsilon)R(\varepsilon)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\omega_1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)R(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Pour $\varepsilon=0$, on a $R(\varepsilon)=0$, puisque alors $a=b$; donc enfin il vient

$$\begin{aligned}2\pi T=&-\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\log\frac{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{2}-u\right)}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{2}-u\right)}\\&+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi(\varepsilon)\log\frac{\xi_{10}(a+u)\xi_{10}(a-u)}{\xi_{10}(b+u)\xi_{10}(b-u)}\,d\varepsilon.\end{aligned}$$

Mais la formule (9), démontrée auparavant, nous permet d'écrire

$$-2\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(2\zeta\frac{\omega_1}{2}-\eta_1\right)=K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\frac{p'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{p\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-e_1}\,d\varepsilon,$$

avec

$$K=1.$$

Or on a

$$2\zeta\frac{\omega_1}{2}-\eta_1=\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{2}\xi_{30}\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{2}}$$

et

$$\frac{p'\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{p\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - e_1} = -2\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\xi_{30}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon},$$

d'où

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{2}\xi_{30}\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{2}} = K\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\xi_{30}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

Transportant dans l'expression de T la valeur de $\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$ donnée par cette équation, nous en concluons finalement

$$\begin{aligned}2\pi T = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon\Bigg[& K\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\xi_{30}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}\;\frac{\xi_{10}\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{20}\frac{\omega_1}{2}\xi_{30}\frac{\omega_1}{2}} \\ & \times\log\frac{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{2}-u\right)}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{2}+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{2}-u\right)} \\ & -\log\frac{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s-\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-u\right)}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon+u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s+\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon-u\right)}\Bigg].\end{aligned}$$

Or si l'on suppose u petit, c'est-à-dire ρ voisin de 1, la fonction écrite dans le crochet devient, comme son second terme, très grande et négative pour ε voisin de s. Si l'on fixe pour s une valeur numérique entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, on peut donc choisir ρ assez voisin de 1 pour que le crochet soit une fonction de ε négative dans tout un intervalle de valeurs de ε, voisines de s.

Déterminons alors une fonction $\Phi(\varepsilon)$ par la condition d'être constante dans l'intervalle $0, \frac{\pi}{2}$, à l'exception de l'intervalle partiel où le crochet est négatif; et dans ce dernier intervalle ε_1, ε_2, prenons pour $\Phi(\varepsilon)$ une fonction négative, décroissante depuis une valeur $\Phi(\varepsilon_1)$ jusqu'à $\Phi(\varepsilon_2)$, ces deux dernières étant comprises entre $-\pi$ et zéro; $\Phi(\varepsilon)$ sera alors pris constamment égal à $\Phi(\varepsilon_1)$ dans l'intervalle zéro, ε_1, et

à $\Phi(\varepsilon_2)$ dans l'intervalle $\varepsilon_2, \frac{\pi}{2}\cdot$ Enfin, assujettissons $\Phi(\varepsilon)$ à satisfaire la condition (9), qui devient ici

$$-\Phi(\varepsilon_2)\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{2}\xi_{30}\frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{2}} > \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} -\Phi'(\varepsilon)\frac{\xi_{20}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\,\xi_{30}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}{\xi_{10}\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}\,d\varepsilon.$$

Toutes ces conditions sont parfaitement compatibles, comme il est facile de s'en assurer; rien n'est plus simple que de former une fonction particulière de ε, qui vérifie toutes ces conditions.

Pour une telle fonction $\Phi(\varepsilon)$, il est clair, d'après les calculs précédents, que la valeur de T sera positive au point $Z = \rho e^{is}$; ceci légitime évidemment l'assertion énoncée ci-dessus.

Il est à peine besoin de faire observer que, par le fait même, la proposition énoncée page 253, relativement au cas du fluide indéfini, et qui rentre comme cas limite dans celui qu'on vient de considérer, se trouve légitimée *a posteriori*.

Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique;

Par LIÉNARD et CHIPART.

INTRODUCTION.

1. Dans les recherches de Physique mathématique ou de Mécanique il arrive fréquemment qu'on ait à résoudre le problème d'Algèbre dont voici l'énoncé, et qui a été le point de départ de cette étude :

Étant donnée une équation algébrique à coefficients réels, trouver les conditions pour que ses racines soient de la forme $-K^2 + \beta\sqrt{-1}$, K *étant essentiellement différent de zéro et* β *pouvant prendre une valeur quelconque, zéro compris.*

Prenons comme exemple l'étude de la stabilité : en appliquant les procédés classiques de la méthode des petits mouvements nous aboutirons, d'ordinaire, à l'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Soit donc

$$a_0 \frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n u = \varphi(t)$$

une telle équation et soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

son équation caractéristique. Toutes les fois que les racines de $f(x) = 0$ satisferont aux conditions énoncées plus haut, l'intégrale générale de l'équation linéaire sans second membre tendra vers zéro pour $t = \infty$, quelles que soient les constantes d'intégration, et le mouvement sera

stable; réciproquement, lorsque ces conditions ne sont pas remplies, il y aura instabilité ([1]).

Les recherches entreprises pour résoudre ce premier problème nous ont amenés à aborder le problème plus général consistant à déterminer combien une équation possède de racines dont la partie réelle ait un signe donné.

Avant d'énoncer les résultats auxquels nous sommes parvenus, commençons par définir les locutions dont nous ferons constamment usage.

2. Définitions. — 1° *Quantités pseudo-positives et pseudo-négatives.* — Pour abréger le langage, nous appellerons quantité *pseudo-positive* toute quantité réelle positive ou imaginaire à partie réelle positive. Une définition analogue s'appliquera aux grandeurs pseudo-négatives. Avec cette terminologie, les racines d'une équation pourront se classer en quatre catégories : racines pseudo-positives, pseudo-négatives, nulles, purement imaginaires.

2° *Formes quadratiques* $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, $\Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots)$, $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *associées à l'équation* $f(x) = 0$. — Soit l'équation

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0,$$

dans laquelle nous mettons en évidence les termes de même parité.

Les racines nulles et purement imaginaires font partie du groupe de racines communes aux équations $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$, en sorte que les problèmes posés au début conduisent naturellement à étudier le résultant des deux équations

$$\varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0.$$

Pour former ce résultant, employons la méthode de Bezout. Si nous désignons par $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ le degré de $f(x)$, l'une au moins des deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ est de degré m et l'on sait

([1]) Nous admettons, bien entendu, que l'application de la théorie des petits mouvements est légitime. C'est là une discussion que nous n'aborderons pas, l'objet de notre Mémoire étant d'étudier une question ressortissant à la théorie des équations algébriques et dont il était intéressant de rappeler l'origine.

que le résultant R de Bezout est un déterminant symétrique de degré m. Désignons par $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ la forme quadratique dont R est le discriminant. Cette fonction, dont nous préciserons plus loin le mode de formation, sera par définition la forme quadratique associée à l'équation $f = 0$.

Pour définir la fonction $\Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots)$, nous opérerons de même sur l'équation

$$f_1(x) = x f(x) = x\varphi(x^2) + x^2\psi(x^2).$$

Par définition, Θ_1 sera la forme quadratique Θ associée à l'équation $f_1 = 0$.

Enfin la fonction $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sera définie par l'égalité

$$(1) \qquad T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \Theta(z_2, z_4, \ldots, z_{2m}) + \Theta_1(z_1, z_3, \ldots).$$

Nous en donnerons tout à l'heure une autre définition plus directe.

3. Ces préliminaires posés, nous sommes en mesure d'énoncer les résultats principaux de ce Mémoire. Nous nous bornerons toutefois, pour ne pas allonger cette Introduction, à donner deux critéria auxquels on reconnaîtra qu'une équation satisfait aux conditions du problème de stabilité.

Premier criterium. — *Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique* T *soit définie positive, autrement dit soit une somme de n carrés positifs indépendants* (¹).

Comme conséquence de l'égalité (1), le critérium peut encore s'énoncer en disant que les formes Θ et Θ_1 doivent être définies positives.

Deuxième critérium. — *Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique Θ soit*

(¹) On rappelle qu'une forme quadratique à n variables n'est dite *définie* que si elle ne peut pas s'annuler pour un système réel de valeurs des variables autre que 0, 0, ..., 0. Par exemple, la forme $(x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ est définie positive, tandis que la forme $(x_1 + x_2)^2$ n'est pas définie.

définie positive et que le polynome $\varphi(x)$ soit complet et ait tous ses coefficients de même signe que le coefficient du terme de plus haut degré de $f(x)$.

Un énoncé analogue s'obtiendrait en utilisant la forme Θ_1 et le polynome ψ.

De ces deux critéria, il est manifeste qu'on devra, dans les applications, donner la préférence au dernier qui conduit à des calculs plus simples. Cependant, comme l'introduction de la forme quadratique T dans cette théorie facilite la démonstration de certaines propositions, il a paru préférable de commencer par établir les propriétés de cette forme T.

4. La première et la seconde Partie de ce Mémoire seront consacrées à la démonstration des deux critéria énoncés ci-dessus et à l'étude des propriétés correspondantes des formes T et Θ. Nous mentionnerons succinctement dans la troisième Partie les considérations auxquelles nous avions tout d'abord recours pour établir le second critérium. L'ordre que nous avons adopté, en vue de faciliter l'exposition, diffère en effet complètement de l'ordre dans lequel ont été trouvées les diverses propositions et nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt d'indiquer comment nous avions été amenés à introduire dans cette étude les formes quadratiques Θ, Θ_1 et T.

La rédaction de ce travail était terminée quand nous avons eu connaissance de recherches sur le même sujet publiées par Routh dans son *Treatise on the stability of a given state of motion* et résumées dans les *Advanced rigid Dynamics* du même auteur.

Routh (¹) aborde successivement le problème par deux méthodes entièrement distinctes.

La première méthode utilise l'équation aux sommes des racines deux à deux ; elle conduit à l'énoncé suivant :

Pour qu'une équation ait toutes ses racines de la forme

$$-R^2 + \beta\sqrt{-1},$$

(¹) ROUTH, *A treatise on the stability of a given state of motion* (London, 1877) et *Advanced rigid Dynamics*, § 256-307, 6ᵉ édition, 1907.

il faut et il suffit que l'équation proposée et l'équation aux sommes des racines deux à deux soient complètes et ne présentent que des permanences.

Cette proposition, retrouvée indépendamment par l'un de nous (¹), a le défaut de fournir $n + \frac{n(n-1)}{2}$ inégalités, alors qu'il résulte manifestement de la nature du problème que les conditions distinctes sont en nombre n; et d'ailleurs, pour peu que le degré de l'équation s'élève, la formation de l'équation aux sommes et la recherche des conditions surabondantes deviennent des plus malaisées.

Pareilles défectuosités ne subsistent plus dans la seconde méthode de Routh. L'auteur applique la formule classique de Cauchy

$$p = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

qui fait connaître le nombre p de racines comprises à l'intérieur du contour C et il ramène la solution du problème à une succession d'opérations analogues à celles qui donnent la suite des polynomes de Sturm. Il forme de cette façon $(n+1)$ polynomes, dont les degrés sont respectivement n, $n-1$, ..., 0 et il démontre que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la suite formée par les coefficients des termes de plus haut degré de ces polynomes ne présente que des permanences (²).

La méthode de Routh se prête admirablement à l'étude des équations numériques, et cela pour la raison suivante : pour exprimer que la forme quadratique T est définie positive, nous devons écrire n inégalités

$$P_1(a_0, a_1, \ldots, a_n) > 0, \qquad P_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad P_n > 0,$$

les P_1, P_2, ..., P_n désignant des polynomes dont le mode de formation est classique.

Au contraire, la méthode de Routh fournit n inégalités

$$S_1(a_0, a_1, \ldots, a_n) > 0, \qquad S_2 > 0, \qquad \ldots, \qquad S_n > 0.$$

(¹) *Journal de Mathématiques spéciales*, avril et mai 1911.

(²) D'une manière générale le nombre de permanences (variations) est égal au nombre de racines pseudo-négatives (positives) de l'équation.

Les premiers membres de ces inégalités ne sont autres que certains produits des polynomes P.

Tant qu'il s'agit d'équations numériques, peu importe qu'on aboutisse aux polynomes P ou à leurs produits S et la supériorité de la méthode de Routh dans ce cas est incontestable. Mais il en est tout autrement dès qu'il devient nécessaire d'étudier l'influence de paramètres variables. Si l'on voulait en effet appliquer aux équations littérales la méthode de Routh, il serait nécessaire de passer des produits S aux polynomes P au moyen de divisions laborieuses et l'on aboutirait de cette façon au premier critérium, c'est-à-dire à un résultat très inférieur sous le rapport de la simplicité au second critérium qui ne découle pas de l'analyse de Routh et que nous croyons nouveau. Aussi, n'avons nous pas pensé que les résultats obtenus par le savant mécanicien anglais fussent de nature à enlever tout intérêt à notre travail. D'une part, nous avons abordé la question sous un jour entièrement différent, et il est toujours utile de considérer les divers aspects d'un même problème. D'autre part, les problèmes de stabilité aboutissent en général à des équations littérales, et pour ce motif on trouvera avantage à leur appliquer le second critérium.

Dans une quatrième Partie nous établirons sommairement les propositions qui permettent de passer de l'énoncé fourni par la méthode de Routh à l'énoncé d'apparence très différente que nous avons donné sous le nom de *premier critérium*.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DE LA FORME QUADRATIQUE T. PREMIER CRITÉRIUM.

3. *Polynome* $G(x, y)$ *associé au polynome* $f(x)$. — Soit le polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Formons le polynome $G(x, y)$ symétrique en x et y

$$G(x, y) = \frac{f(x) f(y) - f(-x) f(-y)}{2(x+y)}, \tag{1}$$

Ce polynome est de degré $n-1$ par rapport à x et y pris séparément. Nous l'appellerons le polynome $G(x, y)$ associé à $f(x)$.

Exemples : 1° $f(x) = a_0 x + a_1$,

$$G(x, y) = \frac{(a_0 x + a_1)(a_0 y + a_1) - (a_0 x - a_1)(a_0 y - a_1)}{2(x + y)} = a_0 a_1;$$

2° $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$,

$$G(x, y) = a_0 a_1 xy + a_1 a_2;$$

3° $f(x) = x^\mu \varpi(x^2)$; on trouve

$$G(x, y) = 0.$$

6. *Forme quadratique* $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *admettant* $G(x, y)$ *comme polynome générateur.* — Multiplions le polynome $G(x, y)$ par le produit xy, nous obtenons l'expression

$$xy\, G(x, y) = \Sigma A x^\alpha y^\beta \qquad (1 \leqq \alpha, \beta \leqq n).$$

Dans cette expression, remplaçons $x^\alpha y^\beta$ par $z_\alpha z_\beta$, nous obtenons la forme quadratique à n variables [1]

$$T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \Sigma A z_\alpha z_\beta.$$

Le polynome $G(x, y)$, qui est toujours symétrique en x et y, est, par définition, le polynome générateur de la forme quadratique T.

Lorsque G sera le polynome associé à $f(x)$, la fonction T portera également le nom de *forme quadratique* associée à $f(x)$.

Exemples : 1° $f(x) = a_0 x + a_1$; on a trouvé

$$G(x, y) = a_0 a_1, \qquad \text{d'où} \qquad T(z_1) = a_0 a_1 z_1^2;$$

2° $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$,

$$G(x, y) = a_0 a_1 xy + a_1 a_2, \qquad T(z_1, z_2) = a_1 a_2 z_1^2 + a_0 a_1 z_2^2;$$

3° $f(x) = x^\mu \varpi(x^2)$,

$$T = 0.$$

7. *Relation entre les formes quadratiques admettant comme polynomes générateurs* $G(x, y)$ *et* $\varphi(x)\varphi(y)G(x, y)$. — Soit

(1) La multiplication de G par xy a seulement pour but d'obtenir pour les z des indices variant de 1 à n et non de 0 à $n - 1$.

$T'(z'_1, z_2, \ldots)$ la forme quadratique admettant $G(x, y)$ comme polynome générateur, et soit $\varphi(x) = \alpha + \beta x + \ldots + \lambda x^i$ un polynome quelconque. La forme quadratique $T(z_1, z_2, \ldots)$ admettant $\varphi(x)\varphi(y)G(x, y)$ comme polynome générateur s'obtient en effectuant dans $T'(z'_1, z'_2, \ldots)$ la substitution linéaire (2)

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} z'_1 = \alpha z_1 + \beta z_2 + \ldots + \lambda z_{i+1}, \\ z'_2 = \qquad \alpha z_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda z_{i+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_q = \qquad\qquad \alpha z_q + \ldots\ldots\ldots + \lambda z_{i+q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour démontrer ce résultat, appliquons les règles du calcul symbolique données au n° 6. Écrivons

$$xy\,G(x, y) = \Sigma\, A\, x^q y^r,$$

ce qui entraîne par définition

$$T'(z'_1, z'_2, \ldots) = \Sigma A\, z'_q z'_r.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} xy\,\varphi(x)\varphi(y)G(x, y) &= \Sigma\, A\, x^q \varphi(x)\, y^r \varphi(y) \\ &= \Sigma\, A[\alpha x^q + \beta x^{q+1} + \ldots + \lambda x^{q+i}][\alpha y^r + \ldots + \lambda y^{r+i}]. \end{aligned}$$

De cette égalité résulte la formule

$$T(z_1, z_2, \ldots) = \Sigma\, A[\alpha z_q + \beta z_{q+1} + \ldots + \lambda z_{q+i}][\alpha z_r + \ldots + \lambda z_{r+i}]$$

qui établit la proposition.

8. *Formules de décomposition pour les polynomes* G *et les formes quadratiques* T. — Soit

$$f(x) = f_1(x) f_2(x):$$

on a

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{f_1(x) f_2(x) f_1(y) f_2(y) - f_1(-x) f_2(-x) f_1(-y) f_2(-y)}{2(x+y)} \\ &= f_2(-x) f_2(-y) \frac{f_1(x) f_1(y) - f_1(-x) f_1(-y)}{2(x+y)} \\ &\quad + f_1(x) f_1(y) \frac{f_2(x) f_2(y) - f_2(-x) f_2(-y)}{2(x+y)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G(x, y) = f_2(-x) f_2(-y) G_1(x, y) + f_1(x) f_1(y) G_2(x, y),$$

G_1 et G_2 désignant les polynomes G associés à f_1 et f_2. A une formule de multiplication pour f correspond donc une formule d'addition pour G.

Plus généralement, considérons le produit de facteurs

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_p(x).$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= f_2(-x) f_3(-x) \dots\dots\dots\dots f_p \quad (-x), \\
\varphi_2(x) &= f_1(+x) f_3(-x) \dots\dots\dots\dots f_p \quad (-x), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\varphi_k(x) &= f_1(+x) \dots\dots f_{k-1}(+x) f_{k+1}(-x) . f_p \quad (-x), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\varphi_p(x) &= f_1(+x) f_2(+x) \dots\dots\dots\dots f_{p-1}(+x).
\end{aligned}$$

On vérifiera facilement l'identité

$$(3) \qquad \begin{aligned} G(x, y) = {} & \varphi_1(x) \varphi_1(y) G_1(x, y) + \varphi_2(x) \varphi_2(y) G_2(x, y) + \dots \\ & + \varphi_p(x) \varphi_p(y) G_p(x, y). \end{aligned}$$

Passons maintenant aux formes quadratiques T, T_1, T_2, ..., T_p associées aux polynomes f, f_1, f_2, ..., f_p et soient

$$T = T(z_1, z_2, \dots, z_n) \qquad T_1 = T_1(z'_1, z'_2, \dots), \qquad T_2 = T_2(z''_1, z''_2, \dots), \qquad \dots$$

Appliquons aux divers termes de l'identité (3) la règle générale donnée au n° **7**, et nous obtiendrons la formule de récurrence

$$(4) \quad \begin{aligned} T(z_1, z_2, \dots, z_n) = {} & T_1(\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 + \dots, \alpha_1 z_2 + \beta_1 z_3 + \dots, \dots) \\ & + T_2(\alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots, \alpha_2 z_2 + \beta_2 z_3 + \dots, \dots) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + T_p(\alpha_p z_1 + \beta_p z_2 + \dots, \alpha_p z_2 + \beta_p z_3 + \dots, \dots). \end{aligned}$$

9. *Première application.* — Soit le polynome

$$f(x) = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n),$$

décomposé en facteurs linéaires et dont le coefficient de x^n est supposé égal à l'unité (multiplier un polynome par A équivaut à multiplier

par A^2 sa forme quadratique associée, ce qui n'influe pas sur les signes de la décomposition en carrés). Choisissons comme $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ces n facteurs linéaires et appliquons les formules de décomposition (3) et (4). Nous obtenons les relations suivantes (¹):

$$G_1(x, y) = x_1, \qquad G_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad G_n(x, y) = x_n,$$

$$(5)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) = (x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n), \\ \varphi_2(x) = (x + x_1)(x - x_3)\ldots\ldots\ldots\ldots(x - x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_i(x) = (x + x_1)(x + x_2)\ldots(x + x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x) = (x + x_1)(x + x_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(x + x_{n-1}); \end{cases}$$

$$G(x, y) = x_1\varphi_1(x)\varphi_1(y) + x_2\varphi_2(x)\varphi_2(y) + \ldots + x_n\varphi_n(x)\varphi_n(y);$$

$$(6)\qquad T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_1^n x_i(z_n + b_i z_{n-1} + \ldots + l_i z_2 + m_i z_1)^2,$$

en écrivant

$$\varphi_i(x) = x^{n-1} + b_i x^{n-2} + \ldots + l_i x + m_i.$$

La décomposition de T en une somme de n carrés est donc réalisée. Cette décomposition va nous permettre de démontrer que le discriminant Δ de cette forme quadratique à n variables a pour valeur

$$(7)\qquad \Delta = x_1 x_2 \ldots x_n \left[\prod_1^n (x_i + x_k)\right]^2 \qquad (i \neq k).$$

On a en effet, d'après la formule (6),

$$\Delta = x_1 x_2 \ldots x_n D_n^2,$$

D_n désignant le module de la substitution

$$(8)\qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & \ldots & m_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & \ldots & m_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & b_n & c_n & \ldots & m_n \end{vmatrix},$$

(¹) On remarque, dans l'application qui est faite de la formule de décomposition (3), qu'on a changé le signe de certains polynomes φ, modification sans influence sur le résultat final.

D_n est un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui est divisible par $x_i + x_k$ quels que soient i et k. En effet, on peut écrire identiquement

$$(9) \qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & \ldots & l_1 & \varphi_1(x) \\ 1 & b_2 & c_2 & \ldots & l_2 & \varphi_2(x) \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & b_n & c_n & \ldots & l_n & \varphi_n(x) \end{vmatrix}.$$

Or, en supposant, pour fixer les idées, $i < k$, les polynomes φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ [formules (5)] sont divisibles par $x - x_k$, tandis que les polynomes $\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_n$ sont divisibles par $x + x_i$. Tous les polynomes φ s'annulent donc en faisant $x = x_k = -x_i$, et il en est de même de D_n d'après (9). Le polynome D_n s'annulant pour $x_i + x_k = 0$ est divisible par $x_i + x_k$ et par suite par $\Pi(x_i + x_k)$.

On peut donc écrire

$$(10) \qquad D_n = A_n \prod_1^n (x_i + x_k).$$

A_n désigne une constante, car D_n et Π sont tous deux de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Montrons qu'on a $A_n = 1$. A cet effet, faisons $x_n = 0$, ce qui entraîne $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = 0$. L'équation (10) prend la forme

$$D_n = A_n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \prod_1^{n-1} (x_i + x_k).$$

tandis que l'équation (8) devient

$$D_n = m_n \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & \beta_{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ 1 & \beta_{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix},$$

les coefficients $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ désignant ce que deviennent les coefficients $b, c, \ldots, l$ dans l'hypothèse $x_n = 0$.

D'autre part, l'application des formules (8) et (10) au polynome $(x + x_1), \ldots, (x + x_{n-1})$ de degré $n - 1$ donne

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \ldots & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ 1 & \beta_{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} = A_{n-1} \prod_1^{n-1} (x_i + x_k).$$

La comparaison de ces divers résultats donne

$$A_n = A_{n-1} = A_{n-2} = \ldots = A_2.$$

La valeur commune de tous les coefficients A est l'unité, comme le montre le calcul direct de A_2. On a donc en définitive

$$\Delta = x_1 x_2 \ldots x_n \left[\prod_1^n (x_i + x_k) \right]^2.$$

Il résulte immédiatement de là la proposition suivante :

Théorème I. — *Si* $f(x) = 0$ *n'a pas de racine commune avec* $f(-x) = 0$, *sa forme associée* T *est une somme de* n *carrés indépendants.*

En effet, si $f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas de racine commune, on a

$$x_1 x_2 \ldots x_n \neq 0, \qquad \prod_1^n (x_i + x_k) \neq 0.$$

Le discriminant Δ est différent de zéro et par suite la forme T est une somme de n carrés indépendants.

10. *Deuxième application.* — Décomposons à présent l'équation en facteurs réels du premier et du second degré :

$$f(x) = \prod_1^i (x + \alpha) \prod (x^2 + \beta x + \gamma).$$

On trouve

$$G_1(x, y) = \alpha_1, \qquad G_2(x, y) = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad G_i(x, y) = \alpha_i;$$
$$G_{i+1} = \beta_1 xy + \beta_1 \gamma_1, \qquad G_{i+2}(x, y) = \beta_2 xy + \beta_2 \gamma_2, \qquad \ldots;$$

d'où

(11) $$\begin{aligned} T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = {} & \alpha_1 P_1^2 + \alpha_2 P_2^2 + \ldots + \alpha_i P_i^2 \\ & + \beta_1 Q_1^2 + \beta_2 Q_2^2 + \ldots\ldots \\ & + \beta_1 \gamma_1 R_1^2 + \beta_2 \gamma_2 R_2^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Les P, Q, R désignent des formes linéaires en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ à coefficients réels.

De la formule (11) résulte le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si $f(x) = 0$ n'a pas de racine commune avec $f(-x) = 0$, les racines pseudo-négatives et pseudo-positives de $f(x)$ sont respectivement en même nombre que les carrés positifs et négatifs indépendants de sa forme associée* T.

Dans le cas général, l'énoncé précédent reste valable, avec cette restriction que la forme associée T *ne contient aucun carré correspondant aux racines appartenant aux groupes $\pm \alpha$ ou $\pm \alpha \pm \beta i$ $(\alpha \neq 0)$.*

La première partie du théorème est la conséquence de la formule de décomposition (11) : si $f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas de racine commune, la forme associée T est une somme de n carrés indépendants (théorème I, n° 9) et la formule (11) établit une décomposition en une somme de n carrés réels.

On peut supposer que les trinomes $x^2 + \beta x + \gamma$ ont tous leurs racines imaginaires, sinon on les décomposerait en facteurs réels du premier degré. Les coefficients γ sont alors positifs.

Au facteur réel du premier degré $(x + \alpha)$ correspond le carré αP^2 qui est de signe contraire à la racine réelle $-\alpha$.

Au facteur réel du deuxième degré $x^2 + \beta x + \gamma$ correspond la somme des carrés $\beta Q^2 + \beta\gamma R^2$, qui sont tous deux de signe contraire à $-\frac{\beta}{2}$, partie réelle des deux racines imaginaires du trinome.

Ces remarques justifient l'énoncé de la première partie. La correspondance entre les signes des carrés de T et les racines, établie pour un mode particulier de décomposition en carrés de la forme T, subsiste pour tout autre mode de décomposition en vertu du théorème connu sous le nom de *loi d'inertie*.

Passons à la seconde partie du théorème. Si $f(x)$ et $f(-x)$ ont des racines communes, on peut écrire

$$f(x) = x^\mu \varpi(x^2) f'(x),$$

$f'(x)$ étant un polynome de degré n' qui n'a pas de racine commune avec $f'(-x)$. Le facteur $x^\mu \varpi(x^2)$ est le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f(-x)$.

Désignons par $G(x, y)$ et $G'(x, y)$ les polynomes G associés à $f(x)$ et $f'(x)$ et par $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $T'(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ les formes quadratiques correspondantes. L'application de la formule de décomposition (3) ou plus simplement un calcul direct donne

$$G(x, y) = x^\mu \varpi(x^2) y^\mu \varpi(y^2) G'(x, y).$$

Soit donc

$$x^\mu \varpi(x^2) = \alpha x^\mu + \beta x^{\mu+2} + \ldots + \lambda x^{n-n'}.$$

Appliquons la règle donnée au n° **7** : $T(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ s'obtient en effectuant sur $T'(z'_1, z'_2, \ldots, z'_{n'})$ la substitution linéaire

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} z'_1 = \alpha z_{\mu+1} + \beta z_{\mu+3} + \ldots\ldots\ldots + \lambda z_{n-n'+1}, \\ z'_2 = \qquad \alpha z_{\mu+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda z_{n-n'+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z'_{n'} = \qquad\qquad \alpha z_{n-n'} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda z_n. \end{array} \right.$$

Les seconds membres des égalités (12) sont des fonctions des z linéairement indépendantes, quelles que soient les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ qui ne sont pas toutes nulles.

Les formes T et T' contiennent donc les mêmes nombres de carrés indépendants et de même signe. Ces carrés correspondent aux racines de $f'(x)$, puisque $f'(x)$ n'a plus de racine commune avec $f'(-x)$.

La forme quadratique T a donc $(n - n')$ carrés déficients correspondant aux racines de $x^\mu \varpi(x^2)$. Ces racines sont, soit nulles, soit purement imaginaires, soit pseudo-positives et négatives, mais dans ce cas elles constituent des groupes de la forme $\pm \alpha$ [provenant des racines réelles positives de $\varpi(x)$] ou encore $\pm \alpha \pm \beta i$ $(\alpha \neq 0)$ provenant des racines imaginaires conjuguées de $\varpi(x)$. Au contraire, les racines de $f'(x)$ ne peuvent former de tels groupes, car $f'(x)$ ne serait plus premier avec $f'(-x)$. L'absence dans la forme T de carrés correspondant aux seules racines pseudo-positives ou pseudo-négatives qui appartiennent à des groupes $\pm \alpha$ ou $\pm \alpha \pm \beta i$ est donc établie.

Premier critérium. — *Pour que l'équation $f(x) = 0$ n'ait que des racines pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme associée* T *soit définie positive.*

La condition est nécessaire : toutes les racines étant pseudo-négatives, deux racines ne peuvent donner une somme nulle, le polynome $f(x)$ est premier avec $f(-x)$, et T est une somme de n carrés indépendants qui sont tous positifs.

La condition est suffisante, car, si elle est remplie, l'équation admet n racines pseudo-négatives, c'est-à-dire que toutes les racines le sont.

11. *Transformation des conditions. Introduction des polynomes* $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ *associés à* $f(x)$, *et des formes quadratiques associées* Θ *et* Θ_1. — Mettons en évidence dans $f(x)$ les termes de même parité :

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2).$$

Portant cette valeur dans l'égalité (1), nous obtenons la nouvelle formule

$$G(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(x^2) + x\psi(x^2) & \varphi(y^2) - y\psi(y^2) \\ \varphi(x^2) - x\psi(x^2) & \varphi(y^2) + y\psi(y^2) \end{vmatrix}}{2(x+y)}$$

$$= \frac{x\psi(x^2)\varphi(y^2) + y\varphi(x^2)\psi(y^2)}{x+y}.$$

Cette formule peut de nouveau se transformer : multiplions haut et bas par $(y - x)$, il vient

$$G(x, y) = xy\frac{\varphi(y^2)\psi(x^2) - \varphi(x^2)\psi(y^2)}{y^2 - x^2} + \frac{y^2\varphi(x^2)\psi(y^2) - x^2\varphi(y^2)\psi(x^2)}{y^2 - x^2},$$

ce que nous écrirons

(13) $$G(x, y) = xy\,F(x^2, y^2) + F_1(x^2, y^2),$$

en désignant par $F(x, y)$ et $F_1(x, y)$ les deux polynomes symétriques en x et y définis par les égalités

(14) $$F(x, y) = \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y - x},$$

(14') $$F_1(x, y) = \frac{y\psi(y)\varphi(x) - x\psi(x)\varphi(y)}{y - x}.$$

Si l'on pose $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$, le polynome F est de

degré $m-1$ et le polynome F_1 de degré $m-1$ ou m, suivant la parité de n.

On reconnaît dans $F(x, y)$ le polynome générateur du résultant de $\varphi = 0$, $\psi = 0$, tel que le donne la méthode de Bezout ([1]).

Pareillement, $F_1(x, y)$ sera le polynome générateur du résultant de $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, φ_1 et ψ_1 étant définis par les relations

$$f_1(x) = \varphi_1(x^2) + x\psi_1(x^2) = x f(x) = x^2\psi(x^2) + x\varphi(x^2),$$

d'où

$$\varphi_1(x) = x\psi(x), \qquad \psi_1(x) = \varphi(x).$$

Nous désignerons par Θ et Θ_1 les formes quadratiques admettant $F(x, y)$ et $F_1(x, y)$ comme polynomes générateurs, ce qu'expriment les égalités

$$xy\,F(x, y) = \Sigma\, B x^\alpha y^\beta, \qquad \Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \Sigma\, B X_\alpha X_\beta;$$
$$xy\,F_1(x, y) = \Sigma\, C x^\alpha y^\beta, \qquad \Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots) = \Sigma\, C Y_\alpha Y_\beta.$$

Pour simplifier le langage, nous dirons que $G(x, y)$, $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ sont les polynomes G, F, F_1 associés à $f(x)$.

De même, $T(Z_1, Z_2, \ldots)$, $\Theta(X_1, X_2, \ldots)$, $\Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots)$ seront les formes quadratiques T, Θ, Θ_1 associées à $f(x)$.

Il résulte de la relation (12) que la forme T s'exprime en fonction de Θ et Θ_1 conformément à la formule

$$(15) \qquad T(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \Theta(z_2, z_4, \ldots, z_{2m}) + \Theta_1(z_1, z_3, \ldots)$$

annoncée au n° **2**.

T ne contient donc aucun terme $Z_\alpha Z_\beta$ où α et β soient de parité différente.

12. *Nouvel énoncé du premier critérium.* — L'identité (15) permet d'énoncer comme suit le premier critérium :

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que les formes Θ et Θ_1 soient définies positives.

([1]) L'introduction des polynomes $F(x, y)$ dans la théorie de l'élimination est due à Cauchy (*voir* n° 13, 3°).

Et pareillement :

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-positives, il faut et il suffit que Θ et Θ_1 soient définies négatives.

Exemples et applications. — 1° $f(x) = a_0 x + a_1$, $\varphi(x) = a_1$, $\psi(x) = a_0$:

$$F(x, y) = 0, \qquad F_1(x, y) = \frac{y a_0 a_1 - x a_0 a_1}{y - x} = a_0 a_1,$$
$$\Theta = 0, \qquad \Theta_1 = a_0 a_1 Y_1^2.$$

2° $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, $\varphi(x) = a_0 x + a_2$, $\psi(x) = a_1$:

$$F(x, y) = \frac{(a_0 y + a_2) a_1 - (a_0 x + a_2) a_1}{y - x} = a_0 a_1, \qquad F_1(x, y) = a_1 a_2,$$
$$\Theta = a_0 a_1 X_1^2, \qquad \Theta_1 = a_1 a_2 Y_1^2.$$

3° $f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, $\varphi(x) = a_1 x + a_3$, $\psi(x) = a_0 x + a_2$:

$$\Theta = (a_1 a_2 - a_0 a_3) X_1^2, \qquad \Theta_1 = a_2 a_3 Y_1^2 + 2 a_0 a_3 Y_1 Y_2 + a_0 a_1 Y_2^2.$$

Pour que toutes les racines de $f(x)$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que Θ et Θ_1 soient définies positives, ce qu'expriment les inégalités

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_2 a_3 & a_0 a_3 \\ a_0 a_3 & a_0 a_1 \end{vmatrix} > 0, \qquad a_0 a_1 > 0.$$

La seconde inégalité s'écrit $a_0 a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0$, de sorte que le système des trois inégalités se réduit au suivant :

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \qquad a_0 a_1 > 0, \qquad a_0 a_3 > 0.$$

4° Donnons encore les expressions de Θ et Θ_1 pour l'équation du quatrième degré $f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$:

$$\Theta = (a_2 a_3 - a_1 a_4) X_1^2 + 2 a_0 a_3 X_1 X_2 + a_0 a_1 X_2^2,$$
$$\Theta_1 = a_3 a_4 Y_1^2 + 2 a_1 a_4 Y_1^2 Y_2^2 + (a_1 a_2 - a_0 a_3) Y_2^2.$$

Nous savons maintenant comment les signes des parties réelles des racines d'un polynome $f(x)$ influent sur les signes de la décomposition

en carrés de la fomre $T = \Theta(Z_2, Z_4, \ldots, Z_{2m}) + \Theta_1(Z_1, Z_3, \ldots)$. Il serait intéressant de savoir comment ils influent séparément sur les signes des carrés de Θ et Θ_1. C'est la question que nous allons examiner dans la deuxième Partie.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES FORMES Θ, Θ_1. SECOND CRITÉRIUM.

15. *Préliminaires. Résultant de Bezout. Formes quadratiques.* — Soient $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ deux équations dont l'une *au moins* est de degré m, l'autre étant de degré $m' \leqq m$.

On sait qu'on peut appliquer de deux manières différentes la méthode de Bezout au calcul du résultant R de ces deux équations.

D'habitude on étudie séparément le cas $m' = m$ et le cas $m' < m$. Pour $m' = m$ le résultant est mis sous forme de déterminant symétrique. Pour $m' < m$ on modifie la méthode en vue de réaliser certaines simplifications dans le calcul de R, mais la symétrie a disparu. Le second procédé, qu'on se contente généralement de mentionner, consiste à considérer le cas $m' = m$ comme le cas général, et à y ramener le cas $m' < m$ en se contentant d'annuler les termes de degré $m, m-1, \ldots, m'+1$ dans l'une des équations; tous les raisonnements donnés dans le cas $m' = m$ restent en effet applicables avec $m' < m$. Dans le cas actuel, nous devons nécessairement recourir à la seconde méthode, qui est seule susceptible de fournir R sous forme de discriminant d'une forme quadratique. Rappelons, dans cet ordre d'idées, les énoncés des théorèmes que nous avons à utiliser dans cette étude.

Écrivons comme suit les développements des deux polynomes :

$$\varphi(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \ldots + A_0,$$
$$\psi(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \ldots + B_0.$$

Par hypothèse, l'un au moins des deux coefficients A_m, B_m est différent de zéro. Formons le système des m polynomes de Bezout F_1,

$F_2, \ldots, F_m$:

$$\begin{aligned}
F_1(x) \quad &= \quad (A_m x^{m-1} + A_{m-1} x^{m-2} + \ldots + A_1)\,\psi(x) \\
&\quad - (B_m x^{m-1} + B_{m-1} x^{m-2} + \ldots + B_1)\,\varphi(x), \\
F_2(x) \quad &= \quad (A_m x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_2)\,\psi(x) \\
&\quad - (B_m x^{m-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + B_2)\,\varphi(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_{m-1}(x) &= \quad (A_m x + A_{m-1})\,\psi(x) - (B_m x + B_{m-1})\,\varphi(x), \\
F_m(x) \quad &= \quad A_m\,\psi(x) - B_m\,\varphi(x).
\end{aligned}$$

Ces polynomes sont de degré $(m-1)$ au plus; nous écrirons

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= c_1^1 + c_1^2 x + \ldots + c_1^m x^{m-1}, \\
F_2(x) &= c_2^1 + c_2^2 x + \ldots + c_2^m x^{m-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
F_m(x) &= c_m^1 + c_m^2 x + \ldots + c_m^m x^{m-1}.
\end{aligned}$$

Ceci posé, voici les résultats qui seront utilisés plus loin :

1° En premier lieu, le déterminant

$$R = \begin{vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_1^m \\ \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot \\ c_m^1 & \ldots & c_m^m \end{vmatrix}$$

est symétrique. On a

$$c_\alpha^\beta = c_\beta^\alpha.$$

2° La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ n'admettent aucune racine commune est

$$R \neq 0.$$

3° Soit l'équation de degré n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x^2) + x\,\psi(x^2) = 0$$
$$(n = 2m \quad \text{ou} \quad n = 2m+1).$$

L'un des deux polynomes φ et ψ, celui qui contient un terme en a_0, est nécessairement de degré m, et l'autre de degré au plus égal à m.

Par définition, le polynome générateur du résultant de $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ s'exprime au moyen de l'égalité

$$F(x, y) = \frac{\varphi(y)\,\psi(x) - \varphi(x)\,\psi(y)}{y - x},$$

ce qu'on peut encore écrire

$$F(x, y) = \psi(x)\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} - \varphi(x)\frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}.$$

Effectuons les divisions par $(y - x)$; nous obtiendrons la formule

$$F(x, y) = F_1(x) + y F_2(x) + \ldots + y^{m-1} F_m(x).$$

Autrement dit, les polynomes de Bezout sont les coefficients du développement de $F(x, y)$ suivant les puissances croissantes de y.

Remplaçons dans $F(x, y)$ les $F_1, F_2, \ldots, F_m$ par leurs expressions explicitées, et nous obtenons l'égalité

$$xy\, F(x, y) = \Sigma c_\beta^\alpha x^\alpha y^\beta = \Sigma c_\alpha^\beta x^\alpha y^\beta \qquad (1 \leq \alpha, \beta \leq m).$$

Par conséquent, la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$, dont $F(x, y)$ est le polynome générateur, aura pour expression

$$\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \Sigma c_\alpha^\beta X_\alpha X_\beta;$$

d'où ce théorème (Cauchy) :

Le discriminant de la forme quadratique Θ *associée au polynome* $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$ *n'est autre que le résultant de Bezout relatif aux deux équations* $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$.

4° *Pour que les équations* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *admettent* k *racines communes, il faut et il suffit que la forme quadratique* $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *soit une somme de* $(m - k)$ *carrés indépendants. Le discriminant* R *de* Θ *est alors nul, ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre* k *exclu, mais l'un au moins des mineurs d'ordre* k *est différent de zéro. En particulier, on a certainement*

$$\frac{\partial^k R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_k^k} \neq 0.$$

Montrons d'abord que si les polynomes φ et ψ ont k racines communes, la forme quadratique Θ est une somme de $(m - k)$ carrés indépendants.

Soit $\varpi(x) = \alpha + \beta x + \ldots + \lambda x^{k-1} + x^k$ le plus grand commun diviseur de φ et ψ. On aura

$$\varphi(x) = \varpi(x)\,\varphi'(x),$$
$$\psi(x) = \varpi(x)\,\psi'(x).$$

L'un des polynomes φ' ou ψ' sera de degré $m-k$, l'autre de degré égal ou inférieur à $m-k$. Écrivons

$$f(x) = \varpi(x^2) f'(x),$$

et soient $F(x, y)$, $F'(x, y)$ les polynomes F associés à $f(x)$ et $f'(x)$. On aura

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y - x} = \varpi(x)\varpi(y)\frac{\varphi'(y)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(y)}{y - x} \\ &= \varpi(x)\varpi(y) F'(x, y), \end{aligned}$$

et par application des règles données au n° 7, on passera de la forme quadratique $\Theta'(X'_1, \ldots, X'_{m-k})$ associée à f' à la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ associée à f, en effectuant la substitution linéaire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'_1 \quad = \alpha X_1 + \beta X_2 + \ldots + \lambda X_k + \ X_{k+1}, \\ X'_2 \quad = \qquad \alpha X_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda X_{k+1} + X_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X'_{m-k} = \qquad \alpha X_{m-k} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X_m. \end{array} \right.$$

Ces $m-k$ formes linéaires en X sont indépendantes, car le déterminant μ d'ordre $m-k$ formé par les coefficients de $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_m$ se réduit à sa diagonale principale et a pour valeur 1. Il résulte de là que les formes quadratiques $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ et $\Theta'(X'_1, X'_2, \ldots)$ contiennent le même nombre de carrés indépendants et ce nombre est égal à $m-k$ puisque $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ n'ont pas de racine commune.

La théorie classique des formes quadratiques nous apprend par suite que le discriminant R est nul, ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre $(k-1)$ inclus, et que l'un au moins des mineurs d'ordre k est différent de zéro. Reste à montrer qu'il en est effectivement ainsi pour le mineur

$$\frac{\partial^k R}{\partial c_1^1 \, \partial c_2^2 \ldots \partial c_k^k}.$$

A cet effet, nous observerons que ce mineur, formé avec les éléments des $(m-k)$ dernières lignes et des $(m-k)$ dernières colonnes de R, n'est autre que le discriminant d'une certaine forme quadratique θ à $(m-k)$ variables obtenue en annulant $X_1, X_2, \ldots, X_k$ dans la forme quadratique Θ. Pour obtenir θ, il nous suffira donc de faire $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = 0$ dans les équations (1), et ces équations ainsi

modifiées définissent une substitution dont le module est égal à μ, c'est-à-dire à l'unité. On a donc

$$\frac{\partial^k R}{\partial c_1^1 \, \partial c_2^2 \ldots \partial c_k^k} = R' \mu^2 = R' \neq 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il peut se faire qu'il n'y ait pas d'autre mineur d'ordre k différent de zéro : c'est, par exemple, ce qui se produira lorsque le facteur commun aux polynomes f et φ se réduira à x^k.

On démontrerait de même la formule plus générale

$$\frac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^1 \, \partial c_2^2 \ldots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \frac{\partial^p R'}{\partial c_1'^1 \, \partial c_2'^2 \ldots \partial c_p'^p},$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Nous avons en définitive établi la proposition directe. La réciproque en découle par voie d'exclusion, car les polynomes φ et ψ ne peuvent avoir que $1, 2, \ldots, (m-1)$ ou m racines communes, et nous venons de voir que Θ comprend $(m-1), (m-2), \ldots, 1$ ou zéro carrés indépendants.

Le théorème établi conduit à considérer les polynomes φ et ψ comme ayant m racines communes lorsque l'un de ces polynomes est identiquement nul. On peut d'ailleurs effectivement considérer le polynome nul comme contenant en facteur l'autre polynome non nul.

14. *Équations vérifiant la condition* $R \neq 0$. — Dans la première Partie, nous avons eu à nous occuper spécialement des équations $f(x) = 0$ n'admettant pas de racine commune avec $f(-x) = 0$. Les équations que nous aurons à considérer particulièrement sont d'un type un peu plus général : elles pourront admettre la racine simple $x = 0$, et seront seulement caractérisées par la condition de ne pas admettre de groupe de deux racines x', x'' dont la somme $x' + x''$ soit nulle. Montrons que cette condition est $R \neq 0$.

Supposons, en effet, l'existence de deux racines x', x'' telles que $x' + x'' = 0$, on aura

$$f(x) = \varpi(x^2) f'(x).$$

Mettant en évidence dans f et f' les termes de même parité

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2), \qquad f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2),$$

nous obtiendrons

$$\varphi(x) = \varpi(x)\varphi'(x), \qquad \psi(x) = \varpi(x)\psi'(x),$$

ce qui démontre que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont au moins une racine commune et que, par suite, on a $R = 0$.

Démontrons à présent la réciproque. Lorsque $R = 0$, deux cas peuvent se présenter (nº **13**, 4º) : ou bien l'un des deux polynomes φ et ψ est identiquement nul, ou bien ces deux polynomes existent et ont au moins un facteur linéaire commun. Dans tous les cas, on aura

$$f(x) = \varpi(x^2)f'(x),$$

et $f(x)$ a deux racines égales et de signe contraire.

Par conséquent, $R \neq 0$ représente la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ n'admette pas de groupe de deux racines x', x'' dont la somme $x' + x''$ soit nulle.

15. Théorème III. — *Lorsque l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle au plus, sa forme associée Θ est définie positive ou définie négative suivant que les racines imaginaires sont toutes pseudo-négatives ou toutes pseudo-positives.*

Lorsque l'équation est de degré pair et n'a par suite aucune racine réelle, cette proposition n'est qu'un cas particulier de l'énoncé donné au nº **12**.

Supposons maintenant l'équation de degré impair. Mettons en évidence la racine réelle α, nous écrirons

$$f(x) = (x - \alpha)f'(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2),$$

f' n'ayant que des racines imaginaires. Supposons-les, par exemple, pseudo-négatives.

Dans cette hypothèse, l'équation $f(x)$ n'admet, quel que soit α, aucun couple de racines dont la somme soit nulle; par conséquent, le résultant $R(\alpha)$ des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ne s'annule pour aucune

valeur de α. Comme c'est une fonction continue de α, il garde un signe constant et, par suite, la forme quadratique Θ associée à $f(x)$ conserve les mêmes nombres de carrés positifs et négatifs quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour déterminer la nature de Θ, supposons $\alpha < 0$. Il résulte de l'énoncé du n° **12** que Θ est définie positive. Elle l'est donc dans tous les cas.

On démontrerait de même que Θ est définie négative lorsque les racines de $f'(x)$ sont pseudo-positives.

16. Théorème IV. — *Lorsqu'une équation vérifiant la condition* $R \neq 0$ *admet une racine réelle au plus, les carrés positifs et négatifs de sa forme associée* Θ *sont respectivement en même nombre que les couples de racines imaginaires pseudo-négatives et pseudo-positives.*

Pour établir ce théorème, nous allons rechercher comment varie le nombre des carrés positifs de Θ lorsqu'on modifie continûment les parties réelles des racines.

Choisissons comme équation initiale l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) \qquad (n = 2m \text{ ou } 2m+1)$$

qui est supposée vérifier les conditions du théorème IV, et dont les $2m$ racines imaginaires sont pseudo-négatives. Il résulte du théorème III que sa forme associée Θ est une somme de m carrés positifs indépendants.

Soient

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \alpha_2 \pm i\beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m \pm i\beta_m$$

les m couples de racines imaginaires, rangés dans un ordre quelconque. Plusieurs des quantités α pourront être égales entre elles, mais nous supposerons en premier lieu que les β sont tous différents.

Laissons les β constants, faisons varier α_1 depuis sa valeur négative initiale jusqu'à la valeur $-\alpha_1$: tant que α_1 est différent de zéro, le résultant R de φ et de ψ reste différent de zéro. Lorsque α_1 passe par la valeur zéro, un carré de Θ et un seul s'annule. En effet, pour $\alpha_1 = 0$, on a

$$f(x) = (x^2 + \beta_1^2) f'(x),$$

$f'(x)$ n'admettant aucun couple de racines dont la somme soit nulle. Par conséquent, si l'on écrit $f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2)$, les équations $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ n'ont pas de racine commune, et les équations

$$\varphi(x) = (x + \beta_1)\varphi'(x) = 0, \qquad \psi(x) = (x + \beta_1)\psi'(x) = 0$$

admettent une racine commune et une seule, d'où résulte (n° 13, 4°) pour Θ un carré déficient et un seul.

En résumé, le passage de α_1 par la valeur zéro modifie d'une unité, tout au plus, le nombre de carrés positifs. Montrons que ce nombre diminue effectivement d'une unité. A cet effet, faisons varier α_2 depuis α_2 jusqu'à $-\alpha_2$, α_3 depuis α_3 jusqu'à $-\alpha_3$, et ainsi de suite.

L'équation à laquelle nous aboutirons finalement aura m couples de racines imaginaires pseudo-positives, et par application du théorème III, sa forme associée Θ sera une somme de m carrés négatifs indépendants. De là résulte que le passage de chaque quantité α par la valeur zéro diminue d'une unité le nombre de carrés positifs de Θ.

Le théorème est donc démontré lorsque les β sont tous différents; Étendons-le au cas où plusieurs β sont égaux entre eux.

Soit $f(x) = 0$ une équation vérifiant la condition $R \neq 0$ et admettant $2p$ racines imaginaires pseudo-négatives, $2q$ racines imaginaires pseudo-positives et une racine réelle au plus.

Considérons l'un des groupes de racines ayant même partie imaginaire; soient

$$\alpha_1 \pm \beta i, \quad \alpha_2 \pm \beta i, \quad \ldots, \quad \alpha_r \pm \beta i.$$

Parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, il n'existe pas de groupe α', α'' dont la somme $\alpha' + \alpha'' = 0$, sinon le résultant R serait nul. Déterminons un intervalle $\beta' < \beta < \beta''$ contenant β, mais ne contenant pas de coefficient β_s afférent aux autres racines de l'équation; choisissons, dans cet intervalle, des nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ tous différents et faisons varier continûment les racines $\alpha_1 \pm \beta i, \alpha_2 \pm \beta i, \ldots, \alpha_r \pm \beta i$ depuis ces valeurs initiales jusqu'aux valeurs

$$\alpha_1 \pm \beta_1 i, \quad \alpha_2 \pm \beta_2 i, \quad \ldots, \quad \alpha_r \pm \beta_r i.$$

Opérons successivement de même pour tous les autres groupes de racines ayant même partie imaginaire. Finalement, nous aboutirons

à une équation $f'(x) = 0$, admettant $2p$ racines imaginaires pseudo-négatives et $2q$ racines imaginaires pseudo-positives, comme l'équation proposée $f(x) = 0$. Les formes quadratiques Θ associées à $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même nature, puisque le résultant R ne s'est jamais annulé au cours de ces transformations et, par application de la première partie de la démonstration, Θ est une somme de p carrés positifs et de q carrés négatifs indépendants. Le théorème se trouve donc établi dans toute sa généralité.

17. Étudions à présent l'équation la plus générale qui vérifie la condition $R \neq 0$ et, à cet effet, commençons par définir ce que nous entendrons par l'expression « rang d'une racine réelle » de l'équation.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les racines réelles de $f(x)$. Cette équation vérifie par hypothèse la condition $R \neq 0$, et il n'y a pas deux racines réelles qui soient égales et de signe contraire. Nous supposerons les racines réelles rangées par ordre de grandeur croissant des valeurs absolues :

$$|x_1| \leqq |x_2| \leqq |x_3| \leqq \ldots \leqq |x_p|,$$

chaque racine multiple étant répétée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité. Par définition, le nombre p représentera le rang de la racine x_p.

Soit, par exemple,

$$f(x) = (x+2)^3(x+1)^2 x(x-3)^2(x^2+x+4)$$

qui vérifie $R \neq 0$. Nous formerons la suite

$$0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad +3 \quad +3,$$

et nous dirons que l'équation possède : trois racines négatives de rang pair, à savoir -1, -2, -2 ; une racine positive de rang pair, à savoir 3.

18. Théorème V. — *Lorsque $f(x) = 0$ vérifie la condition $R \neq 0$, le nombre des carrés positifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-négatives de l'équation, augmenté du nombre des racines réelles négatives de rang pair.*

De même, le nombre de carrés négatifs de Θ *est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-positives de l'équation, augmenté du nombre de racines réelles positives de rang pair.*

Soient $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2$ les couples de racines imaginaires; x_1, x_2, ..., x_r les racines réelles rangées par ordre de grandeur croissant des valeurs absolues.

Faisons varier la racine x_1 depuis x_1 jusqu'à x_2 par valeurs réelles, puis passons par continuité de la racine double x_2 au couple de racines imaginaires $x_2 \pm \gamma i$, le nombre positif γ étant choisi inférieur au plus petit des nombres β. Pendant cette transformation, la condition $R \neq 0$ a été constamment vérifiée, car l'égalité $x' + x'' = 0$ n'a été satisfaite à aucun instant. Par conséquent la nature de Θ n'a pas été modifiée.

Opérons de même sur le groupe x_3, x_4 de manière à aboutir à un couple de racines imaginaires $x_4 \pm \delta i$, δ étant positif et inférieur à γ, et ainsi de suite. Nous transformerons finalement $f(x)$ en un polynome de même degré $f'(x)$ vérifiant les conditions du théorème IV, et dont la forme associée Θ' est de même nature que Θ. Comptons les couples de racines imaginaires de $f'(x)$, nous obtenons :

1° Les couples de racines imaginaires de $f(x)$;

2° p couples de racines imaginaires pseudo-négatives, en désignant par p le nombre de racines négatives contenues dans la suite x_2, x_4, x_6, ...;

3° q couples de racines imaginaires pseudo-positives, en désignant par q le nombre de racines positives contenues dans la même suite.

Appliquant le théorème IV à l'équation $f'(x) = 0$, nous en déduisons le théorème V.

19. Il est facile de modifier l'énoncé du théorème V pour le rendre applicable au cas où R serait nul :

Théorème V*a*. — *Le nombre des carrés positifs de* Θ *est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-négatives de l'équation, augmenté du nombre des racines négatives de rang pair.*

De même, le nombre des carrés négatifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-positives de l'équation, augmenté du nombre des racines réelles positives de rang pair.

Toutefois, si l'équation admet des groupes de racines de la forme $\pm\alpha$ ou $\pm\alpha\pm\beta i (\alpha\neq 0)$, il ne doit être tenu compte ni des uns ni des autres dans le décompte des nombres des divers genres de racines.

Le nouvel énoncé conduit aux mêmes résultats que l'ancien dans le cas où $R\neq 0$. Si au contraire R est nul, on a vu (n° **15**, 4°) qu'on peut poser

$$f(x)=\varpi(x^2)f'(x),$$

$f'(x)$ n'admettant plus de groupes de racines telles que $x'+x''=0$. $\varpi(x^2)$ peut contenir x en facteur, mais seulement à une puissance paire.

En écrivant

$$f(x)=\varphi(x^2)+x\psi(x^2),\qquad f'(x)=\varphi'(x^2)+x\psi'(x^2),$$

on aura

$$\varphi(x)=\varpi(x)\varphi'(x),\qquad \psi(x)=\varpi(x)\psi'(x).$$

Désignant par $F(x,y)$ et $F'(x,y)$ les polynomes F associés à $f(x)=0$, $f'(x)=0$, il viendra

$$F(x,y)=\frac{\varphi(y)\psi(x)-\varphi(x)\psi(y)}{y-x}=\varpi(x)\varpi(y)F'(x,y).$$

La répétition de raisonnements déjà faits plusieurs fois montre alors que les formes Θ et Θ' associées à $f(x)$ et $f'(x)$ contiennent le même nombre de carrés indépendants et que ces carrés sont de même signe. Nous voyons ainsi que la décomposition de Θ en carrés ne donne d'indication que sur les racines de $f'(x)$, à l'exclusion des racines $\pm\alpha$ et $\pm\alpha\pm\beta i$ provenant du polynome $\varpi(x^2)$.

La forme quadratique Θ_1 donne lieu à un énoncé analogue à celui du théorème V*a*, sauf que le mot *pair* doit être remplacé par le mot *impair*.

La forme Θ_1 est en effet associée à l'équation $f_1(x)=xf(x)=0$ comme Θ l'est à $f(x)=0$, et l'adjonction de la racine réelle $x=0$

transforme toutes les racines réelles de rang impair de $f(x)$ en racines de rang pair pour f_1.

20. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la démonstration du second critérium, relatif aux équations ayant toutes leurs racines pseudo-négatives.

SECOND CRITÉRIUM. — *Soit le polynome à coefficients réels*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x^2) + x\psi(x^2).$$

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique Θ soit définie positive et que le polynome $\varphi(x)$ ait tous ses coefficients du même signe que a_0.

Les conditions sont nécessaires : Tout d'abord nous avons démontré (n° **12**) que Θ devait être définie positive. En second lieu décomposons $f(x)$ en un produit de facteurs réels du premier et du deuxième degré

$$f(x) = a_0 \Pi(x+\alpha)\Pi(x^2+\beta x+\gamma).$$

Lorsque toutes les racines sont pseudo-négatives, les α, β, γ sont tous positifs, et, par conséquent, le polynome $f(x)$ est complet et a tous ses coefficients du même signe que a_0. Pareille propriété est vérifiée *a fortiori* par $\varphi(x)$.

Les conditions sont suffisantes : En premier lieu, la forme Θ étant définie positive, le polynome $f(x)$ vérifie la condition $R \neq 0$, et il résulte du théorème V que l'équation ne peut posséder de racines imaginaires pseudo-positives. Pour démontrer qu'elle ne peut posséder de racines réelles positives, faisons à présent intervenir les conditions relatives à $\varphi(x)$; nous allons montrer que l'existence de racines positives conduirait à une contradiction.

A cet effet, désignons par u la plus grande racine positive et prouvons que la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ serait négative pour les valeurs particulières

$$X_1 = 1, \qquad X_2 = u^2, \qquad X_3 = u^4, \qquad \ldots, \qquad X_m = u^{2m-2}.$$

Soit, comme précédemment, $F(x, y) = \dfrac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y - x}$ le

polynome générateur de Θ. On a, par définition,

$$\Theta(1, u^2, u^4, \ldots, u^{2m-2}) = F(u^2, u^2) = \lim_{x=y=u^2} \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y-x},$$

c'est-à-dire

$$\Theta(1, u^2, u^4, \ldots) = \varphi'(u^2)\psi(u^2) - \varphi(u^2)\psi'(u^2),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\Theta = \psi(u^2)[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)],$$

en tenant compte de l'égalité $\varphi(u^2) + u\psi(u^2) = f(u) = 0$.

Faisons à présent intervenir la condition que $\varphi(x)$ a tous ses coefficients de même signe que a_0. Ceci entraîne

$$a_0\varphi(u^2) > 0$$

ou

$$a_0\psi(u^2) < 0,$$

en utilisant à nouveau la condition $f(u) = 0$.

Comme, d'autre part, u est la plus grande racine de $f(x)$, on a

$$a_0 f'(u) \geqq 0,$$

c'est-a-dire

$$a_0\psi(u^2) + 2a_0 u[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)] \geqq 0$$

et, *a fortiori*,

$$a_0[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)] > 0,$$

d'où

$$\Theta(1, u^2, u^4, \ldots) < 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Le critérium est donc démontré.

Un critérium analogue s'obtient en utilisant, avec la forme Θ, le polynome ψ et le coefficient a_n au lieu de φ et a_0. La démonstration est la même, sauf que u devrait représenter la plus petite racine et non la plus grande.

On peut enfin remplacer Θ par Θ_1, à condition de permuter le rôle de φ et de ψ.

21. *Applications. Conduite des calculs.* — L'application des théorèmes qu'on vient d'établir nécessite la détermination du signe des carrés indépendants des formes quadratiques Θ et Θ_1. Tant qu'il s'agit d'équations numériques de faible degré, on peut procéder effec-

tivement à la décomposition en carrés; mais, dans la majorité des cas, il est préférable de recourir à un théorème que nous allons rappeler et qui n'exige que le calcul des discriminants R et R_1 et de mineurs de ces déterminants.

Soit une forme quadratique Θ à m variables

$$\Theta = \Sigma c_\alpha^\beta X_\alpha X_\beta.$$

Considérons la suite formée par le discriminant R de Θ et des dérivées successives de ce discriminant :

$$(2) \qquad R, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1^1}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_m^m}.$$

Les termes de cette suite sont des mineurs symétriques de R, et le dernier terme est égal à 1.

Le théorème annoncé est le suivant :

1° *Lorsque la forme Θ est définie positive, tous les termes de la suite sont positifs.*

2° D'une manière générale, lorsque R, $\frac{\partial R}{\partial c_1^1}$, ... sont différents de zéro, le nombre de carrés positifs indépendants de Θ est égal au nombre de permanences de la suite (2) et les carrés négatifs sont en nombre égal aux variations (Williamson).

Ces résultats classiques se rattachent à la formule de décomposition

$$\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) = \varepsilon_1 X_1^2 + \varepsilon_2(\alpha_2^2 X_1 + X_2)^2 + \ldots + \varepsilon_m(\alpha_m^1 X_1 + \alpha_m^2 X_2 + \ldots + X_m)^2,$$

laquelle formule suppose que $\Theta(X_1, \ldots, X_m)$, $\Theta(0, X_2, \ldots, X_m)$, ..., $\Theta(0, 0, \ldots, 0, X_m)$ contiennent respectivement $m, (m-1), (m-2), \ldots,$ 2, 1 carrés indépendants, autrement dit que les quantités R, $\frac{\partial R}{\partial c_1^1}$, etc. sont différentes de zéro.

Inversement, si ces conditions sont remplies, la décomposition donnée par la formule précédente est possible et d'une seule manière, et les coefficients des carrés sont donnés par les formules d'Hermite

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m = R, \qquad \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_m = \frac{\partial R}{\partial c_1^1}, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_m = \frac{\partial^{m-1} R}{\partial c_1^1 \ldots \partial c_{m-1}^{m-1}}.$$

En divisant ces équations deux à deux, on aura les valeurs de ε_1, ε_2, ... et il est évident qu'on obtiendra pour les ε autant de nombres positifs que la suite (2) présente de permanences.

On a supposé qu'on prenait les dérivées successivement par rapport à $c_1^1, c_2^2, \ldots, c_m^m$. En principe, on peut intervertir à volonté l'ordre des dérivations. Cependant l'ordre des dérivations peut cesser d'être indifférent lorsque des termes de la suite sont nuls. La démonstration précédente tombe du reste en défaut dans ce cas, et il nous faut entrer dans quelques explications complémentaires.

Plusieurs éventualités peuvent se produire :

1° En premier lieu, la forme quadratique Θ peut se réduire à une somme de $(m-k)$ carrés indépendants. Les k premiers termes de la suite sont alors nuls.

Si la forme quadratique Θ était du type le plus général, il conviendrait de former tous les mineurs d'ordre k, et de s'assurer que l'un de ces mineurs est différent de zéro. Ce calcul est inutile avec les formes quadratiques particulières que nous avons à étudier, car on a démontré au n° **13**, 4°, que Θ jouit de cette propriété remarquable que le mineur $\dfrac{\partial^k R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_k^k}$ est certainement différent de zéro lorsque les carrés indépendants sont en nombre $(m-k)$. En formant les dérivées de R dans l'ordre naturel, on est donc assuré que le nombre des carrés déficients est égal au nombre des premiers termes nuls rencontrés.

Soit donc

$$(3) \qquad D^k R, \quad D^{k+1} R, \quad \ldots, \quad D^m R \qquad \left(D^k = \frac{\partial^k}{\partial c_1^1 \ldots \partial c_k^k}\right)$$

la suite des dérivées successives de R, qui débute par le terme $D^k R$ différent de zéro. Si tous les termes de cette suite sont différents de zéro, on pourra appliquer à la forme Θ la règle précédemment énoncée : les carrés positifs et négatifs de Θ seront respectivement en même nombre que les permanences et variations de la suite (3). C'est ce qui résulte de la formule générale

$$\frac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \frac{\partial^p R'}{\partial c_1'^1\, \partial c_2'^2 \ldots \partial c_p'^p},$$

qui a été donnée au n° **13**, 4°.

Le cas où plusieurs termes de la suite (3), à l'exclusion du premier, sont nuls va faire l'objet des 2° et 3°.

2° Plusieurs termes non consécutifs de la suite (3) sont nuls.

Chaque terme nul est donc encadré par deux termes différents de zéro. Dans ce cas, la suite (3) possède les propriétés d'une suite de Sturm : les deux termes qui encadrent un terme nul sont de signes contraires. C'est ce qui résulte de la formule classique

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1\,\partial c_2^2} = \frac{\partial R}{\partial c_1^1}\frac{\partial R}{\partial c_2^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial c_1^2}\right)^2.$$

Un raisonnement par continuité permettra alors d'établir que ce terme nul doit être compté comme formant une permanence et une variation avec les deux termes qui le comprennent.

Pour démontrer cette propriété, commençons par discuter le cas particulier où l'on a $R \neq 0$. Remplaçons l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

par l'équation plus générale

$$(a_0 + \alpha_0)x^n + (a_1 + \alpha_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + \alpha_n) = 0,$$

dans laquelle les α sont arbitraires. Nous pourrons déterminer un domaine $|\alpha_i| < \varepsilon$, à l'intérieur duquel les termes de la suite R, DR, ..., $D^{m-1}R$ qui sont différents de zéro quand on annule tous les α, gardent un signe constant. Quant aux termes qui s'annulent pour les $\alpha = 0$, ils pourront également s'annuler sur certaines lignes ou surfaces passant par l'origine $\alpha = 0$, mais il existera certainement une infinité de points de ce domaine auxquels correspondra une suite complète R, DR, ..., $D^{m-1}R$. Pour s'en assurer il suffit de remarquer que les D^kR sont des polynomes en $a_0, a_1, \ldots, a_n$ qui ne peuvent être identiquement nuls. Effectivement, nous avons démontré plus haut qu'à toute équation $f(x) = 0$, n'admettant que des racines pseudo-négatives, correspondait une forme quadratique Θ définie positive, et par conséquent une suite complète R, DR, ..., $D^{m-1}R$. A tous ces points correspondent également des formes Θ de même nature, car R garde un signe constant. Raisonnant alors sur une de ces formes quadratiques Θ, nous en concluons le résultat énoncé : Quel que soit le signe pris par un terme de la suite qui s'annule pour $\alpha = 0$, ce terme

formera une permanence et une variation avec les deux termes non nuls qui le comprennent.

Ce résultat s'étend au cas plus général où Θ est une somme de $(m-k)$ carrés indépendants, comme il résulte des formules du n° **15**, 4° :

$$(4)\quad \begin{cases} f(x) = \varpi(x^2) f'(x), \qquad \varpi(x) = \alpha + \beta x + \ldots + x^k, \\ \Theta(X_1, X_2, \ldots) = \Theta'(X'_1, X'_2, \ldots), \\ \dfrac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \dfrac{\partial^p R'}{\partial c_1'^1\, \partial c_2'^2 \ldots \partial c_p'^p}. \end{cases}$$

Ne modifions pas le facteur $\varpi(x^2)$, mais, comme nous l'avions fait plus haut pour $f(x)$, remplaçons $f'(x)$ par la forme plus générale

$$(a'_0 + \alpha'_0) x^{n-2k} + (a_1 + \alpha'_1) x^{n-2k-1} + \ldots + (a'_{n-2k} + \alpha'_{n-2k}).$$

Les formules (4) restent constamment vraies, et comme $f'(x)$ satisfait à la condition $R' \neq 0$ comme $f(x)$ satisfaisait tout à l'heure à la condition $R \neq 0$, la généralisation est immédiate.

Nos raisonnements supposent les dérivées prises successivement par rapport à $c_1^1, c_2^2, \ldots, c_m^m$. Les explications données au 1° montrent que, si $R = 0$, on doit suivre l'ordre naturel jusqu'à la première dérivée non nulle rencontrée, mais à partir de ce moment il est indifférent d'effectuer les dérivations dans un ordre quelconque, à condition que les dérivées obtenues soient différentes de zéro, de telle sorte qu'il n'y ait pas d'ambiguïté possible sur le décompte des permanences et des variations.

Par continuité, il en sera encore de même lorsqu'il n'y a pas deux dérivées nulles de suite, chaque terme nul compris entre deux dérivées non nulles de signe contraire devant encore être considéré comme formant avec les deux dérivées qui l'encadrent une permanence et une variation.

3° Plusieurs termes consécutifs de la suite (3)

$$D^k R, \quad D^{k+1} R, \quad \ldots, \quad D^{m-1} R, \quad 1$$

sont nuls.

$D^k R$ doit se calculer par la formule

$$D^k R = \frac{\partial^k R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2 \ldots \partial c_k^k}.$$

Montrons que dans le calcul des termes qui suivent $D^k R$, on peut choisir l'ordre des nouvelles dérivations à effectuer, de telle manière que la circonstance 3° ne se produise pas.

Soient, en effet, Δ et $\Delta' = \dfrac{\partial \Delta}{\partial c_\alpha^\alpha}$ deux termes consécutifs de la suite (3). Écrivons

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} c_\alpha^\alpha & \dots & c_\alpha^m \\ \dots & \dots & \dots \\ c_m^\alpha & \dots & c_m^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_\alpha^\alpha & \dots & c_\alpha^m \\ \dots & & \\ c_m^\alpha & & \Delta' \end{vmatrix}.$$

Supposons $\Delta \neq 0$ et $\Delta' = 0$. Développons

$$\Delta = c_\alpha^\alpha \Delta' + \sum_{r=s=\alpha+1}^{r=s=m} c_m^r c_s^m \Delta'',$$

Δ'' désignant un mineur du premier ordre de Δ'.

Puisque $\Delta' = 0$ et $\Delta \neq 0$, c'est que l'un au moins de ces mineurs Δ'' est différent de zéro. Or on sait que, lorsqu'un mineur non symétrique d'un déterminant symétrique Δ' est différent de zéro, il existe au moins un mineur symétrique qui est aussi différent de zéro. Soit $\dfrac{\partial \Delta'}{\partial c_\xi^\xi}$ ce mineur. Prenons les dérivées dans l'ordre $c_1^1 c_2^2 \dots c_\alpha^\alpha c_\xi^\xi \dots$ et nous serons assurés que le terme Δ' se trouvera compris entre deux termes différents de zéro.

En définitive, dans l'hypothèse $R = 0$, on formera d'abord les dérivées dans l'ordre naturel, ce qui fournira sans ambiguïté le mineur principal. A partir de ce moment, il pourra être nécessaire de changer l'ordre des dérivations afin d'éviter la formation de termes consécutifs nuls. La suite obtenue fera connaître le nombre de carrés positifs et négatifs de la forme Θ.

22. *Formation des discriminants* R *et* R_1. — Soient

$$\varphi(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0,$$
$$\psi(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0$$

les deux polynomes dont il s'agit de former le résultant de Bezout. On démontre aisément que ce résultant, tel qu'il a été défini au n° **15**, est

donné par la formule

$$R = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & & A_m \\ -B_1 & -B_2 & \dots & & -B_m \\ A_2 & A_3 & \dots & A_m & 0 \\ -B_2 & -B_3 & \dots & -B_m & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ A_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -B_m & 0 & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} B_0 & B_1 & \dots & & B_{m-1} \\ A_0 & A_1 & \dots & & A_{m-1} \\ 0 & B_0 & \dots & & B_{m-2} \\ 0 & A_0 & \dots & & A_{m-2} \\ . & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_0 \end{Vmatrix},$$

le produit de ces deux matrices s'effectuant par colonnes verticales, conformément aux règles connues du produit de deux déterminants.

Le déterminant R ainsi formé est symétrique : on calculera seulement les termes c_α^β, pour lesquelles $\alpha > \beta$, en désignant respectivement par α et β les rangs des colonnes de la première et de la seconde matrice qui servent à former le terme c_α^β.

Exemple. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du septième degré ait toutes ses racines pseudo-négatives. Soit

$$f(x) = a_0 x^7 + a_1 x^6 + \dots + a_7.$$

Écrivons $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$, nous aurons

$$\varphi(x) = a_1 x^3 + a_3 x^2 + a_5 x + a_7 = A_3 x^3 + \dots + A_0,$$
$$\psi(x) = a_0 x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 = B_3 x^3 + \dots + B_0$$

et, par suite,

$$R = \begin{Vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ -a_4 & -a_2 & -a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ -a_2 & -a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} a_6 & a_4 & a_2 \\ a_7 & a_5 & a_3 \\ & a_6 & a_4 \\ & a_7 & a_5 \\ & & a_6 \\ & & a_7 \end{Vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_5 a_6 - a_4 a_7 & a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 \\ a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_3 a_4 - a_2 a_5 + a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_4 - a_0 a_5 \\ a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_2 - a_0 a_3 \end{vmatrix},$$

et les conditions pour que l'équation du septième degré ait toutes ses

racines pseudo-négatives s'énoncent

$$R > 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial c_2^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2} > 0,$$

$$a_0 a_1 > 0, \qquad a_0 a_3 > 0, \qquad a_0 a_5 > 0, \qquad a_0 a_7 > 0$$

$\left(\text{nous avons remplacé } \frac{\partial R}{\partial c_1^1} \text{ par } \frac{\partial R}{\partial c_2^2} \text{ dont l'expression est plus simple}\right)$.

23. Dans l'étude des questions de stabilité d'un mouvement défini par une équation linéaire à coefficients constants, on aura à exprimer non seulement qu'il y a amortissement, mais encore que l'amortissement s'effectue avec une rapidité suffisante. En d'autres termes, il faut que les racines de l'équation caractéristique

$$f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$$

soient de la forme $-k^2 + \beta\sqrt{-1}$, k^2 étant supérieur à un nombre positif donné l. Ce problème se ramène au précédent, car, en posant $x = -l + z$, on devra écrire que les racines de l'équation en $z : f(-l+z) = 0$ sont pseudo-négatives. Il faudra donc remplacer, dans les équations de condition, les coefficients a_n, a_{n-1}, etc. par les quantités $f(-l)$, $f'(-l)$, $\frac{f''(-l)}{1.2}$, etc.

TROISIÈME PARTIE.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

24. Dans la seconde Partie de ce Mémoire, nous avons subordonné la démonstration du second critérium à la discussion du polynome $G(x, y)$ étudié dans la première Partie. L'introduction de ce polynome au début du Mémoire, incontestablement avantageuse au point de vue didactique, peut paraître artificielle, et de fait nous n'avons été conduits à le considérer qu'après avoir achevé l'étude du second critérium et approfondi les propriétés des formes quadratiques Θ et Θ_1. Il n'est donc pas hors de propos d'insister davantage sur la proposition suivante qui a été le point de départ de toute cette étude.

Théorème VI. — *La forme quadratique Θ associée à $f(x)$ est définie positive ou définie négative suivant que les racines de $f(x)$ sont toutes pseudo-négatives ou pseudo-positives.*

Ce cas particulier du premier critérium constitue le seul emprunt qui ait été fait à la première Partie du Mémoire quand il s'est agi d'établir la démonstration du second critérium. Pour établir ce théorème, nous avions eu primitivement recours à deux procédés différents : le premier fait appel à la continuité des racines des équations algébriques, tandis que le second utilise des formules de récurrence vérifiées par les formes Θ et Θ_1. Nous allons exposer ces deux procédés.

25. *Premier procédé de démonstration du théorème VI.* — Soit l'équation à coefficients réels

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

dont nous supposerons le coefficient a_0 constant, les autres pouvant prendre des valeurs arbitraires. On sait que les racines de $f(x) = 0$ sont des fonctions continues des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et réciproquement.

Soit D_0 le domaine des points $|a_1, a_2, \ldots, a_n|$ tel que l'équation $f(x) = 0$ ne possède que des racines pseudo-négatives. Montrons que ce domaine est d'un seul tenant.

Écrivons à cet effet le tableau

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_n \end{matrix}$$

des racines de deux équations $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ qui n'admettent, par hypothèse, que des racines pseudo-négatives. Nous disposerons en tête de chaque suite les couples de racines imaginaires conjuguées. Soient alors

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n$$

des quantités qui varient à partir des valeurs initiales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour aboutir aux valeurs $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Nous pouvons effectuer le passage des valeurs initiales aux valeurs finales, de telle sorte que la

partie réelle de chaque variable z garde un signe constant. Cela est évident quand x_p et x'_p sont réels, ou encore quand x_p et x_{p+1} sont imaginaires, conjugués en même temps que x'_p et x'_{p+1}. Reste à étudier le cas où des racines réelles x correspondent à des racines imaginaires x' (ou inversement). Supposons par exemple x_p et x_{p+1} réels, tandis qu'on a $x'_{p+1} = \alpha + \beta i$ et $x'_{p+1} = \alpha - \beta i$. On fera varier z_p et z_{p+1} depuis x_p et x_{p+1} jusqu'à α, et ensuite on dédoublera la racine double α en deux racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$.

Dans ces transformations continues, les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gardent des valeurs réelles et la chaîne de points $|a_1, a_2, \ldots, a_n|$ se trouve entièrement contenue dans le domaine D_0, car les quantités z restent constamment pseudo-négatives comme le sont les racines x et x'.

Le même raisonnement est applicable à tout domaine D_p tel que l'équation de degré n possède p racines pseudo-positives et $(n-p)$ racines pseudo-négatives. Tous ces domaines sont d'un seul tenant.

Mettons en évidence dans $f(x)$ les termes de même parité

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) \qquad (n = 2m \quad \text{ou} \quad 2m+1),$$

et soit $\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ la forme quadratique Θ associée à $f(x)$. C'est une fonction à m variables, et il résulte du n° **15** que le discriminant R de cette forme est différent de zéro lorsque toutes les racines de $f(x)$ sont pseudo-négatives. On en conclut que, dans le domaine D_0, toutes les formes quadratiques Θ sont des sommes de m carrés indépendants et comportent le même nombre m' de carrés positifs. Il s'agit de démontrer qu'on a $m' = m$ et, à cet effet, il suffira de vérifier le théorème pour une équation particulière de chaque degré.

Tout d'abord, le théorème est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$, car on a

$$n = 1, \qquad f(x) = a_0 x + a_1, \qquad m = 0, \qquad \Theta = 0,$$
$$n = 2, \qquad f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \qquad m = 1, \qquad \Theta = a_0 a_1 X_1^2.$$

Démontrons que, si le théorème est vrai pour n, on peut former une équation particulière de degré $n+2$, vérifiant la même propriété. Voici deux solutions de ce problème :

Première solution. — Prenons

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) f(x);$$

$f(x)$ vérifie par hypothèse le théorème VI. On a

$$f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)[\varphi(x^2) + x\psi(x^2)],$$

d'où

$$\varphi'(x) = (\alpha x + \gamma)\varphi(x) + \beta x\psi(x),$$
$$\psi'(x) = (\alpha x + \gamma)\psi(x) + \beta\quad\varphi(x).$$

Faisons $\alpha = 1$, $\gamma = \beta^2$ et montrons qu'on peut choisir β positif suffisamment petit pour que la forme $\Theta'(X_1, X_2, \ldots, X_{m+1})$ soit définie positive.

Remplaçant φ' et ψ' par leurs valeurs dans l'expression du polynome $F'(x, y)$ générateur de Θ', il vient

$$F'(x, y) = xy F(x, y) + \beta\varphi(x)\varphi(y) + A\beta^2 + B\beta^3 + C\beta^4,$$

A, B, C désignant des polynomes en x et y, dont nous n'aurons pas besoin de connaître l'expression. On a donc la formule de récurrence

$$\Theta'(X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}) = \theta'(X_1, \ldots, X_{m+1}) + A'\beta^2 + B'\beta^3 + C'\beta^4,$$

en désignant par θ' la forme quadratique

$$\theta' = \Theta(X_2, X_3, \ldots, X_{m+1}) + \beta P^2.$$

Sans insister sur les détails d'une démonstration rigoureuse, on se rend compte que pour $\beta > 0$ la forme θ' est définie positive et qu'on peut choisir β suffisamment petit pour que Θ' ait tous ses carrés de même signe que ceux de θ', à la seule condition que les quantités X_1, $X_2, \ldots, X_{m+1}$ ne soient pas toutes nulles. Dans ces conditions, le polynome $f'(x)$ de degré $n+2$ satisfera bien au théorème VI.

Deuxième solution. — Choisissons α, β, γ de telle sorte que $\beta^2 = 2\alpha\gamma$ et prenons, par exemple,

$$f'(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)f(x).$$

En utilisant les formules de récurrence relatives à φ' et ψ' on trouve

$$F'(x, y) = \left(\frac{1}{4} + xy\right)F(x, y)$$
$$+ \frac{1}{2}\varphi(x)\varphi(y) + \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)][\varphi(y) + \psi(y)],$$

d'où, par application des règles du calcul symbolique,

$$\Theta'(X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}) = \frac{1}{4}\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) + \Theta(X_2, X_3, \ldots, X_{m+1}) + \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2.$$

La forme Θ' est positive et ne peut s'annuler qu'en faisant $X_1 = X_2 = \ldots = X_{m+1} = 0$. Elle est donc définie positive.

Une démonstration analogue s'applique au cas où les racines de $f(x)$ sont toutes pseudo-positives. Il suffit de changer le signe de β. La forme Θ est alors définie négative.

La proposition qui fait l'objet du théorème VI est donc établie; et comme ce résultat était le seul dont nous ayons tiré parti dans la démonstration du théorème V, n° **18**, cette démonstration est rendue indépendante du premier critérium.

26. Montrons à présent que, inversement, le premier critérium est un corollaire immédiat du théorème V :

Soit $f(x) = 0$ une équation n'ayant pas de racine commune avec $f(-x) = 0$. Considérons les deux équations

$$f(x) = 0, \qquad f_1(x) = xf(x) = 0,$$

et désignons par Θ et Θ_1 les formes quadratiques Θ associées à $f(x)$ et $f_1(x)$. Ces équations jouissent toutes deux de la propriété de n'admettre aucun groupe de racines ayant pour expression $\pm\alpha$ ou $\pm\alpha\pm\beta i$ $(\alpha \neq 0)$. On peut donc leur appliquer le théorème V, et comme les racines réelles de rang impair de $f(x)$ sont racines de rang pair de $f_1(x)$, on en conclut que les carrés positifs et négatifs de la forme quadratique

$$\Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) + \Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots)$$

sont respectivement en même nombre que les racines pseudo-positives et pseudo-négatives de $f(x)$.

Cette proposition comprend comme cas particulier le premier critérium.

Telle est la marche qui a été effectivement suivie dans l'étude des propriétés des formes quadratiques Θ, Θ_1 et T. Quant à l'idée d'introduire des formes quadratiques, elle a été suggérée par la remarque

suivante, énoncée dans un précédent travail [1] : Soit D le résultant de Sylvester, relatif aux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ [2]. Pour les cinq premiers degrés il a été vérifié que, pour $a_0 > 0$, le déterminant D et tous ses mineurs sont positifs lorsque les racines de $f = 0$ sont toutes pseudo-négatives [3].

Or, le discriminant d'une forme quadratique positive a aussi tous ses mineurs symétriques positifs, et ce rapprochement de propriétés a suggéré l'idée d'introduire dans la question les formes quadratiques. En substituant au résultant de Sylvester le résultant de Bezout, de manière à avoir un déterminant symétrique, nous avons été conduits à étudier la forme quadratique Θ. Nous venons de voir comment s'est imposée l'introduction de la forme Θ_1 et enfin de la forme T.

Ayant reconnu l'intérêt de cette forme quadratique

$$T = \Theta(X_1, X_2, \ldots, X_m) + \Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots),$$

la question s'est posée de trouver le polynome générateur $G(x, y)$ de cette forme T. Le problème comporte autant de solutions qu'on peut établir de lois de correspondance entre les suites

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_m; \qquad Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots$$

et

$$Z_1, \quad Z_2, \quad \ldots, \quad Z_n.$$

On a fait choix de la solution

$$\begin{array}{llll} X_1 = Z_2, & X_2 = Z_4, & \ldots, & X_m = Z_{2m}, \\ Y_1 = Z_1, & Y_2 = Z_3, & \ldots, & \end{array}$$

qui conduit, pour le polynome générateur, à la forme simple

$$G(x, y) = xy\,F(x^2, y^2) + F_1(x^2, y^2) = \frac{f(x)f(y) - f(-x)f(-y)}{2(x+y)}.$$

Ainsi se trouve justifiée l'introduction, au début de la théorie, du polynome G qui vérifie les formules de récurrence (3) et (4) données au n° 8.

---

(1) Liénard, *Journal de Mathématiques spéciales*, mai 1911.

(2) Pour la définition de ce résultant, se reporter au n° 29.

(3) On suppose, dans cet énoncé, que a_0 est positif.

27. *Second procédé de démonstration du théorème VI.* — Il consiste à utiliser des formules de multiplication auxquelles satisfont les polynomes F et F_1 et qui s'établissent comme celles relatives aux polynomes G.

Soient les polynomes

$$f(x)=f'(x)f''(x)=\varphi(x^2)+x\psi(x^2),$$
$$f'(x)=\varphi'(x^2)+x\psi'(x^2),\qquad f''(x)=\varphi''(x^2)+x\psi''(x^2).$$

L'identification donne

$$\varphi(x)=\varphi'(x)\varphi''(x)+x\psi'(x)\psi''(x),\qquad \psi(x)=\varphi'(x)\psi''(x)+\varphi''(x)\psi'(x).$$

Désignons par F, F', F'' les polynomes F associés à f, f', f''; par F_1, F'_1, F''_1 les polynomes F_1 associés à f, f', f'', autrement dit les polynomes F associés à $f_1=xf$, $f'_1=xf'$, $f''_1=xf''$.

Calculons F et F_1 :

$$\begin{aligned}
F(x,y)&=\frac{\begin{vmatrix}\varphi(y) & \psi(y)\\ \varphi(x) & \psi(x)\end{vmatrix}}{y-x}\\
&=\frac{\begin{vmatrix}\varphi'(y)\varphi''(y)+y\psi'(y)\psi''(y) & \varphi'(y)\psi''(y)+\varphi''(y)\psi'(y)\\ \varphi'(x)\varphi''(x)+x\psi'(x)\psi''(x) & \varphi'(x)\psi''(x)+\varphi''(x)\psi'(x)\end{vmatrix}}{y-x}\\
&=\varphi''(x)\varphi''(y)F'(x,y)+\varphi'(x)\varphi'(y)F''(x,y)\\
&\qquad+\psi''(x)\psi''(y)F'_1(x,y)+\psi'(x)\psi'(y)F''_1(x,y).
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
F_1(x,y)&=\varphi''(x)\varphi''(y)F'_1(x,y)+\varphi'(x)\varphi'(y)F''_1(x,y)\\
&\qquad+xy\psi''(x)\psi''(y)F'(x,y)+xy\psi'(x)\psi'(y)F''(x,y).
\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi'(x)=A_1+A_2x+\ldots,\qquad \varphi''(x)=C_1+C_2x+\ldots,$$
$$\psi'(x)=B_1+B_2x+\ldots,\qquad \psi''(x)=D_1+D_2x+\ldots,$$

et désignons par Θ, Θ', Θ''; Θ_1, Θ'_1, Θ''_1, les formes qui admettent F, F', F''; F_1, F'_1, F''_1, comme polynomes générateurs. L'application du calcul symbolique défini aux n^{os} **6**, **7** conduit aux formules

$$\begin{aligned}
\Theta(X_1,X_2,\ldots)=\;&\Theta'(C_1X_1+C_2X_2+\ldots,\ C_1X_2+C_2X_3+\ldots)\\
&+\Theta''(A_1X_1+A_2X_2+\ldots,\ A_1X_2+A_2X_3+\ldots)\\
&+\Theta'_1(D_1X_1+D_2X_2+\ldots,\ D_1X_2+D_2X_3+\ldots)\\
&+\Theta''_1(B_1X_1+B_2X_2+\ldots,\ B_1X_2+B_2X_3+\ldots)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Theta_1(Y_1, Y_2, \ldots) = \quad & \Theta'_1(C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots, C_1 Y_2 + C_2 Y_3 + \ldots) \\ & + \Theta''_1(A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \ldots, A_1 Y_2 + A_2 Y_3 + \ldots) \\ & + \Theta'(D_1 Y_2 + D_2 Y_3 + \ldots, D_1 Y_3 + D_2 Y_4 + \ldots) \\ & + \Theta''(B_1 Y_2 + B_2 Y_3 + \ldots, B_1 Y_3 + B_2 Y_4 + \ldots).\end{aligned}$$

Ces formules fournissent un nouveau procédé de démonstration du théorème VI, indépendant de toute considération relative à la continuité des racines. A cet effet, nous allons montrer que, si l'équation $f = 0$ a toutes ses racines pseudo-négatives, les formes Θ et Θ_1 associées à f sont définies positives.

En effet, nous avons déjà vu que, dans cette hypothèse, le discriminant de Θ est différent de zéro. Il en est de même pour Θ_1, car l'équation $f_1 = xf(x) = 0$ n'a qu'une racine nulle et partage avec $f = 0$ la propriété de ne pas admettre de groupe de racines x', x'' telles que $x' + x'' = 0$.

D'autre part, les formules précédentes montrent avec évidence que, si le théorème est vrai pour f' et f'', il est vrai pour le polynome $f = f'f''$. Il suffit donc de le vérifier pour les deux premiers degrés, ce qui se fait immédiatement en se reportant aux valeurs données au n° **12**.

28. *Sur la condition* $R > 0$. — Les développements qui précèdent ont mis en évidence la supériorité du second critérium au point de vue de la simplicité, la moitié des conditions que donne ce critérium se réduisant à la forme simple $a_0 a_k > 0$. Peut-on aller plus loin dans la voie de la simplification? A cet égard, nous allons montrer que la condition de degré le plus élevé, à savoir

$$R > 0,$$

est irréductible et ne peut être remplacée par aucune autre de degré inférieur.

Soit l'équation générale

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

dans laquelle a_0 est supposé constant. Nous considérerons, pour la commodité du langage, les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme les coor-

données d'un point M d'un hyperespace à n dimensions, et nous donnerons les noms de surfaces et de lignes à des multiplicités à $(n-1)$ et $(n-2)$ dimensions.

Soient $D_0, D_1, \ldots, D_p, \ldots, D_n$ les régions de l'hyperespace où l'équation $f(x)=0$ admet $0, 1, \ldots, p, \ldots, n$ racines pseudo-positives. Nous avons démontré précédemment que ces régions sont d'un seul tenant. Cherchons à présent les équations des surfaces qui séparent ces $(n+1)$ régions.

Lorsqu'on modifie les racines d'une façon continue, les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ varient d'une façon continue et réciproquement. Le point figuratif $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'une équation $f(x)=0$ ne peut donc passer d'une région à une autre sans qu'une racine réelle s'annule ou qu'une racine imaginaire devienne purement imaginaire. Étudions successivement ces deux cas :

1° Lorsqu'une racine s'annule, il vient $a_n=0$; et réciproquement, si a_n passe du positif au négatif, le nombre de racines positives change de parité. La totalité du plan $a_n=0$ forme donc limite de régions $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

2° Lorsqu'une racine devient purement imaginaire, on a

$$f(x)=(x^2+\beta^2)f'(x).$$

Posant

$$f(x)=\varphi(x^2)+x\psi(x^2), \qquad f'(x)=\varphi'(x^2)+x\psi'(x^2),$$

on en conclut

$$\varphi(x)=(x+\beta^2)\varphi'(x), \qquad \psi(x)=(x+\beta^2)\psi'(x),$$

et, par conséquent, les équations $\varphi=0$, $\psi=0$ ont une racine commune. Elles n'en ont qu'une seule si $f(x)$ n'admet pas d'autre groupe de racines purement imaginaires ou telles que $x'+x''=0$. Cela entraîne

$$(1) \qquad R=0, \qquad \frac{\partial R}{\partial c_1^1}\neq 0.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie. Tout point de la surface $R=0$ vérifiant $\frac{\partial R}{\partial c_1^1}\neq 0$ n'est pas nécessairement limite de régions D_p et D_q;

en effet, les conditions (1) entraînent

$$\varphi(x) = (x+\gamma)\varphi'(x), \qquad \psi(x) = (x-\gamma)\psi'(x),$$

φ' et ψ' n'ayant pas de racine commune. Il en résulte que γ est réel, mais cette quantité réelle peut être positive, nulle ou négative, et il correspond aux valeurs négatives de γ une certaine nappe Σ de la surface $R = 0$, laquelle nappe n'est pas limite séparative des régions D.

Désignons par S le reste de la surface R, c'est-à-dire la nappe $\gamma > 0$. Tout point de cette nappe forme limite séparative, car aux environs de ce point l'équation $f(x) = 0$ admettra deux racines infiniment voisines de $\sqrt{-\gamma}$, c'est-à-dire telles que

$$\varepsilon \pm (1+\eta)\sqrt{-\gamma},$$

avec ε et η infiniment petits et de signes quelconques. Le point M passera donc d'une région D_p à une région contiguë D_q lorsque ε passera du positif au négatif.

Enfin, si l'on a $R = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial c_1^1} = 0$, tous les mineurs du premier ordre de R sont nuls et, par suite, il en est de même pour les dérivées partielles

$$\frac{\partial R}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

Le point M est un point multiple de la surface $R = 0$. Des points de cette nature forment des lignes singulières dont il n'est pas nécessaire d'étudier ici les propriétés. Il nous suffit de remarquer que ni la nappe Σ, ni les lignes singulières ne peuvent pénétrer dans les régions D_0 et D_n, car, dans ces régions, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de racine commune avec $f(-x) = 0$, et par suite $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ n'ont pas de racine commune.

Étudions à présent la forme quadratique Θ. Son discriminant est égal à R et elle contient m variables en désignant par $2m$ ou $2m+1$ le degré de $f(x)$. Pour $R \neq 0$, la forme Θ est décomposable en m carrés indépendants; pour $R = 0$, $\dfrac{\partial R}{\partial c_n^1} \neq 0$, un carré s'annule et par conséquent la surface $R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ divise l'espace en $m+1$ régions auxquelles correspondent $0, 1, 2, \ldots, m$ carrés positifs pour Θ. A ce nouveau point de vue, les nappes S et Σ de la surface R inter-

viennent en totalité comme limites de régions, tandis que le plan $a_n = 0$ n'intervient pas. On se rend compte à présent que la surface $\Sigma = 0$ doit figurer comme un lieu de points pour lesquels les règles générales tombent en défaut, et l'on se rend compte en même temps de la raison pour laquelle la condition $R > 0$ est irréductible : la région D_0, où doit se trouver le point figuratif $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lorsque toutes les racines sont pseudo-négatives, est limitée par les surfaces

$$a_0 a_n = 0, \qquad R = 0.$$

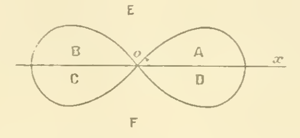
Les deux conditions $a_0 a_n > 0$ et $R > 0$ seraient donc suffisantes si le plan a_n et la surface R ne se coupaient plusieurs fois en divisant l'espace en plusieurs régions D_0, D′, D″, ...; et c'est pour fixer le choix de la région D_0 qu'interviennent les $n - 2$ conditions additionnelles données par les deux critères.

Précisons ces considérations par un exemple :

Soit la lemniscate

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui, jointe à l'axe des x, divise le plan en six régions A, B, C, D, E, F.



Pour exprimer que le point (x, y) se trouve dans la région E, il suffit des deux inégalités

$$f(x, y) > 0 \qquad (y > 0).$$

S'agit-il au contraire d'exprimer que ce point se trouve dans la région A, il faut écrire trois inégalités, savoir :

1° Les deux inégalités

$$f(x, y) < 0 \qquad (y > 0),$$

qui sont vérifiées par les deux régions A et B.

2° Une dernière condition qui sera, par exemple, $x > 0$, mais qui pourrait tout aussi bien s'écrire $x + y > 0$ ou $ax - y^2 > 0$ et d'une façon générale $\varphi(x, y) > 0$, la courbe $\varphi = 0$ devant seulement être choisie de telle sorte qu'elle ne pénètre pas dans les régions A et B et qu'elle laisse ces deux régions de part et d'autre.

Mais, quelle que soit la troisième condition, les deux premières sont irréductibles.

QUATRIÈME PARTIE.

COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DE ROUTH.

29. Commençons par énoncer les relations qui existent entre les résultants R, R_1 de Bezout et le résultant D que fournit la méthode de Sylvester appliquée aux deux polynomes φ et ψ. Pour ne pas grossir démesurément le texte de ce travail, nous nous bornerons à de brèves indications.

Soit l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \varphi(x^2) + x\psi(x^2).$$

En rangeant dans un ordre convenable les lignes du résultant de Sylvester, on peut mettre ce résultant sous la forme

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & .. & . & .... & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & . & .... & . & . \\ 0 & a_1 & a_3 & . & .... & . & . \\ 0 & a_0 & a_2 & . & .... & . & . \\ . & 0 & .. & . & .... & . & . \\ . & . & .. & . & .... & . & 0 \\ . & . & .. & 0 & .... & a_{n-2} & a_n \\ 0 & 0 & .. & 0 & a_{2m+1-n} & .... & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant D est d'ordre $n - 1$ et sa diagonale principale est égale à $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Nous désignerons par Δ_p le mineur constitué par les p premières lignes et colonnes de D. On aura donc $\Delta_{n-1} = D$, puisque D est d'ordre $n - 1$.

Par analogie nous désignerons par Δ_n le déterminant

$$\Delta_n = \left| \begin{array}{ccccccc|c} & & & & & & & 0 \\ & & & \mathrm{D} & & & & 0 \\ & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & a_{n-2m} & \ldots & & a_{n-2} & a_n \end{array} \right|.$$

On a évidemment $\Delta_n = a_n \mathrm{D}$. Le déterminant Δ_n n'est autre que le résultant de Sylvester relatif aux polynomes $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ définis par l'identité

$$xf(x) = f_1(x) = \varphi_1(x^2) + x\psi_1(x^2).$$

Distinguons deux cas suivant la parité de n:

1° $n = 2m + 1$. On a les formules

$$\mathrm{R} = \mathrm{D} = \Delta_{n-1}, \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial c_1^1} = \Delta_{n-3}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2} = \Delta_{n-5}, \qquad \frac{\partial^{m-1} \mathrm{R}}{\partial c_1^1 \ldots \partial c_{m-1}^{m-1}} = \Delta_2.$$

Pour ne pas compliquer l'écriture, esquissons la démonstration dans le cas particulier $n = 7$, $(m = 3)$.

On a

$$\mathrm{D} = \Delta_6 = \left| \begin{array}{cccc|cc} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{array} \right|.$$

Multiplions D par le déterminant μ (¹)

$$\mu = \left| \begin{array}{c|cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -a_0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -a_0 & -a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{array} \right| = a_1^3.$$

(¹) *Cf.* les expressions de D et μ avec celles des matrices du n° 22 dont le produit donne le résultant R de Bezout.

Effectuons l'opération par colonnes verticales :

$$\mu\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_5 & a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_6 - a_0 a_7 \\ 0 & a_7 & a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_3 a_4 - a_2 a_5 + a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_3 a_6 - a_2 a_7 \\ 0 & 0 & a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_5 a_6 - a_4 a_7 \end{vmatrix}.$$

c'est-à-dire

$$a_1^3 \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \times R = a_1^3 R$$

ou

$$\Delta_6 = R.$$

L'égalité $\Delta_4 = \frac{\partial R}{\partial c_1^1}$ se démontrerait de même en supprimant : dans Δ_6 les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes; dans μ, les deux premières lignes, la première et la dernière colonne, et ainsi de suite. La démonstration est générale.

2° $n = 2m$. On a les formules

$$R = a_0 \Delta_{n-1}, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1^1} = a_0 \Delta_{n-3}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1\, \partial c_2^2} = a_0 \Delta_{n-5}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} R}{\partial c_1^1 \ldots \partial c_{m-1}^{m-1}} = a_0 \Delta_1.$$

Enfin le second résultant R_1 de Bezout vérifie des relations analogues, à savoir :

1° Pour $n = 2m + 1$, la suite formée par R_1 et ses dérivées successives par rapport aux éléments de la diagonale principale s'écrit :

$$a_0 \Delta_n, \quad a_0 \Delta_{n-2}, \quad \ldots, \quad a_0 \Delta_1, \quad 1.$$

2° Pour $n = 2m$, cette suite devient

$$\Delta_n, \quad \Delta_{n-2}, \quad \ldots, \quad \Delta_2, \quad 1.$$

Rapprochant ces résultats, nous voyons que les deux suites formées par les dérivées successives de R et de R_1 s'écrivent :

$$(1) \qquad \begin{cases} 1, & \Delta_2, & \Delta_4, & \Delta_6, & \ldots, \\ 1, & a_0 \Delta_1, & a_0 \Delta_3, & a_0 \Delta_5, & \ldots. \end{cases}$$

Les derniers termes de ces deux suites sont Δ_n et $a_0\Delta_{n-1}$ quand n est pair, et Δ_{n-1} et $a_0\Delta_n$ quand n est impair.

30. Ce sont ces relations qui vont permettre de ramener les résultats obtenus par Routh aux propositions démontrées dans la première Partie. Pour abréger, bornons-nous au cas où toutes les quantités Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sont différentes de zéro. Dans ce cas, les suites (1) sont complètes, les formes quadratiques Θ et Θ_1 possèdent le nombre maximum de carrés indépendants et les carrés positifs et négatifs de Θ et de Θ_1 sont respectivement en même nombre que les permanences et les variations des deux suites (1).

Transformons cet énoncé; deux nombres α, β forment une permanence ou une variation suivant que leur produit $\alpha\beta$ est positif ou négatif. Donc le nombre total des permanences (variations) des deux suites est égal au nombre de termes positifs (négatifs) des deux suites

$$\begin{array}{llll} \Delta_2, & \Delta_2\Delta_4, & \Delta_4\Delta_6, & \ldots, \\ a_0\Delta_1, & a_0^2\Delta_1\Delta_3, & a_0^2\Delta_3\Delta_5, & \ldots, \end{array}$$

c'est-à-dire au nombre de termes positifs (négatifs) de la suite unique

$$a_0\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_1\Delta_3,\quad \Delta_2\Delta_4.\quad \Delta_3\Delta_5,\quad \ldots,\quad \Delta_{n-2}\Delta_n.$$

Ce nombre est d'autre part égal, pour une raison analogue à celle donnée ci-dessus, au nombre de permanences (variations) de la suite

$$(2)\qquad a_0,\quad \Delta_1,\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\quad \frac{\Delta_4}{\Delta_3},\quad \ldots,\quad \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}},\quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

En résumé, l'énoncé du théorème II (n° **10**) peut être mis sous la forme suivante :

Théorème IIa. — *Lorsque tous les Δ sont différents de zéro, le nombre de racines pseudo-négatives* (pseudo-positives) *d'une équation algébrique à coefficients réels est égal au nombre de permanences* (variations) *de la suite*

$$a_0,\quad \Delta_1,\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\quad \ldots,\quad \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}},\quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

On remarquera qu'on a

$$\Delta_1 = a_1, \qquad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n.$$

51. *Méthode de Routh.* — Par application du théorème de Cauchy le nombre de racines pseudo-négatives d'une équation

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

est égal à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)} dz \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

évaluée le long d'un contour formé par l'axe des y et par une demi-circonférence de rayon infini situé du côté des x négatifs.

Désignons par $f_0(y)$ et $f_1(y)$ les deux polynomes

$$f_0(y) = a_0 y^n \quad - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} + \ldots,$$
$$f_1(y) = a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + \ldots.$$

[Ces deux polynomes sont en valeur absolue égaux respectivement à $\varphi(-y^2)$ et $y\psi(-y^2)$ ou inversement.]

Nous obtiendrons pour valeur prise par $f(z)$ en un point de l'axe Oy :

$$f(z) = f(yi) = i^n[f_0(y) - i f_1(y)] = i^n \rho\, e^{i\varphi}.$$

L'intégrale étendue à l'axe Oy a donc pour valeur

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\varphi.$$

$\Delta\varphi$ est la variation de l'argument φ lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour calculer $\Delta\varphi$, il est nécessaire de connaître l'ordre dans lequel se succèdent les racines des deux équations $f_0(y) = 0$ et $f_1(y) = 0$, et à cet effet Routh effectue sur les polynomes f_0 et f_1 les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur et parvient au résultat suivant :

Théorème de Routh. — Soit

$$f_0 = f_1 \, Q_1 - f_2,$$
$$f_1 = f_2 \, Q_2 - f_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{n-2} = f_{n-1} Q_{n-1} - f_n,$$

l'algorithme du plus grand commun diviseur; *le nombre des racines pseudo-négatives* (pseudo-positives) *de* $f(x)$ *est égal au nombre des permanences* (variations) *de la suite formée par les coefficients des termes de plus haut degré en* y *dans les polynomes* $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

52. *Comparaison entre le théorème de Routh et le théorème II a.* — L'identité de l'énoncé du théorème II *a* avec le théorème de Routh va résulter de la démonstration du théorème suivant :

Les coefficients de Routh sont respectivement égaux aux termes de la suite (2).

Pour faciliter la démonstration nous allons modifier les notations et écrire

$$f_0(y) = a_0^0 y^n - a_2^0 y^{n-2} + a_4^0 y^{n-4} + \ldots,$$
$$f_1(y) = a_1^1 y^{n-1} - a_3^1 y^{n-3} + \ldots.$$

Nous avons ajouté un second indice o aux coefficients de f_0 et un indice 1 aux coefficients de f_1. De même nous poserons

$$f_2(y) = a_2^2 y^{n-2} - a_4^2 y^{n-4} + \ldots,$$
$$f_3(y) = a_3^3 y^{n-3} - a_5^3 y^{n-5} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Effectuons les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur, il vient

$$f_0(y) = \frac{a_0^0}{a_1^1} y f_1(y) - f_2(y),$$

ce qui fournit les formules d'identification

$$a_2^2 = a_2^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_3^1, \qquad a_4^2 = a_4^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_5^1, \qquad a_{2p}^2 = a_{2p}^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_{2p+1}^1.$$

Considérons maintenant le déterminant Δ_n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots & 0 \\ a_0^0 & a_2^0 & a_4^0 & \dots & . \\ 0 & a_1^1 & a_3^1 & \dots & . \\ . & .. & .. & \dots & . \\ 0 & .. & .. & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

On ne modifie pas la valeur de Δ_n en ajoutant aux éléments de chacune des lignes de rang pair les éléments de la ligne de rang impair qui la précède immédiatement, multipliés par $-\frac{a_0^0}{a_1^1}$, et cette transformation n'altère pas non plus la valeur des mineurs $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$.

Or, après cette modification, les éléments d'une ligne de rang pair deviennent

$$0, \quad a_2^2, \quad a_4^2, \quad a_6^2, \quad \dots .$$

De là résulte la formule

$$\Delta_n = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_4^2 & a_6^2 & \dots \\ a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots \\ .. & .. & .. & \dots \end{vmatrix}.$$

Le nouveau déterminant est formé avec les coefficients de f_1 et f_2 de la même manière que Δ_n était formé avec ceux de f_0 et f_1. Nous pourrons effectuer sur ce nouveau déterminant une transformation analogue qui mettra en évidence le facteur a_2^2 multiplié par une fonction des coefficients de f_2 et f_3, etc. De proche en proche nous arrivons ainsi à la relation

$$\Delta_n = a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n.$$

Pareillement, la transformation s'appliquera aux mineurs Δ_p et conduira à la formule

$$\Delta_p = a_1^1 a_2^2 \dots a_p^p.$$

De ces formules résultent les égalités

$$a_1^1 = \Delta_1, \qquad a_2^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \qquad a_3^3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \qquad \dots, \qquad a_n^n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

ce qui démontre le théorème.

A la vérité, Routh conduit les calculs de la recherche du plus grand

commun diviseur d'une manière un peu différente de celle que nous venons d'indiquer pour les besoins de l'identification. A chaque division, Routh introduit un facteur positif choisi de manière à éviter les coefficients fractionnaires. Les calculs sont ainsi simplifiés tant qu'il s'agit d'équations numériques, mais cet avantage disparaît dans le cas des équations littérales.

La série des restes $f_2, f_3, \ldots, f_n$ est complète lorsque les quantités Δ sont toutes différentes de zéro. Dans le cas contraire, la série pourra comprendre moins de $n-1$ termes, soit parce que f_0 et f_1 auront un plus grand commun diviseur, soit parce que le degré des restes s'abaissera de plus d'une unité à chaque opération. Nous renverrons au Mémoire de Routh pour l'examen des modifications à apporter à la méthode lorsque ces circonstances se produisent. C'est surtout dans ces cas que se manifeste la supériorité de la méthode de Routh appliquée aux équations numériques.

35. *Correspondance de nos résultats et de ceux d'Hermite.* — Soient $F(z)=0$ une équation à coefficients imaginaires, $F_0(z)$ le polynome obtenu en changeant i en $-i$ dans tous les coefficients de $F(z)$. Hermite considère le polynome réel symétrique en z et z'

$$H(z', z) = -i\frac{F(z')F_0(z) - F(z)F_0(z')}{z'-z}$$

et démontre que la décomposition en carrés de la forme quadratique associée donne les signes des coefficients de i des racines de $F(z)$.

Soit $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0$ une équation à coefficients réels. Pour appliquer le théorème d'Hermite à la détermination du signe de la partie réelle des racines de $f(x)$, il suffit de considérer l'équation

$$F(z) = f(-iz) = \varphi(-z^2) - iz\psi(-z^2) = 0,$$

car les racines $f(-iz)$ sont celles de $f(x)$ multipliées par i. On trouve alors, tous calculs faits, pour la fonction $H(z', z)$ correspondant

$$H(z', z) = -2\frac{z'\psi(-z'^2)\varphi(-z^2) - z\psi(-z^2)\varphi(-z'^2)}{z'-z}$$

que nous écrirons, en multipliant haut et bas, par $z'+z$,

$$-\frac{H(z',z)}{2}=\frac{z'^2\psi(-z'^2)\varphi(-z^2)+zz'[\psi(-z^2)\varphi(-z^2)-\psi(-z^2)\varphi(-z'^2)]-z^2\psi(-z^2)\varphi(-z'^2)}{z'^2-z^2}.$$

Comparons à la fonction $G(x, y)$

$$G(x,y)=\frac{f(x)f(y)-f(-x)f(-y)}{2(x+y)}=\frac{x\psi(x^2)\varphi(y^2)+y\psi(y^2)\varphi(x^2)}{x+y}.$$

Multipliant haut et bas par $x-y$, on peut encore écrire

$$G(x,y)=\frac{-y^2\psi(y^2)\varphi(x^2)+xy[\psi(y^2)\varphi(x^2)-\psi(x^2)\varphi(y^2)]+x^2\psi(x^2)\varphi(y^2)}{x^2-y^2}.$$

On passe de l'expression de $G(x, y)$ à celle de $-\frac{H(z',z)}{2}$ en changeant pour les puissances paires de x, x^{2p} en $(-z^2)^p$ et pour les puissances impaires, x^{2p+1} en $z(-z^2)^p$, et de même pour y et z'. On passera donc de la forme $T(Z_1, Z_2, \ldots)$ associée à $G(x, y)$ à la forme quadratique associée à $-\frac{H(z',z)}{2}$ en changeant

$$Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3,\quad Z_4,\quad Z_5,\quad Z_6,\quad Z_7,\quad \ldots$$

en

$$Z_1,\quad Z_2,\quad -Z_3,\quad -Z_4,\quad Z_5,\quad Z_6,\quad -Z_7,\quad \ldots.$$

Le changement de signe de quelques variables n'ayant pas d'influence sur la décomposition en carrés, la correspondance des résultats est établie.

La règle de correspondance donnée ci-dessus entre les x et z ou entre les y et z' peut du reste se justifier en faisant les remarques suivantes :

1° L'application de cette règle de correspondance séparément aux numérateurs et aux dénominateurs de $-\frac{H}{2}$ et de G permute les numérateurs l'un dans l'autre et de même pour les dénominateurs.

2° Il revient au même d'effectuer la modification séparément sur le numérateur et le dénominateur ou de l'opérer sur le quotient Q après division effectuée. Cela tient à ce que le dénominateur x^2-y^2 ne contient que des puissances paires de x et de y et qu'en multipliant Q par x^2-y^2, les exposants de x et y gardent l'un et l'autre la même parité.

Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles;

PAR PIERRE DUHEM.

Il y a quelque temps, nous avons donné un Mémoire destiné à examiner et à éclaircir certains paradoxes qui s'étaient rencontrés dans l'étude des corps diamagnétiques (1). Dans ce Mémoire, nous avons été conduits à établir la stabilité ou l'instabilité de certains états d'équilibre électrique ou magnétique.

Les méthodes qui nous ont permis d'obtenir ces résultats offraient un assez grave inconvénient; développées pour le cas où le système étudié contient un seul corps homogène, elles ne paraissaient pas susceptibles de s'étendre aux systèmes composés de plusieurs corps de nature différente.

Pour remédier à cet inconvénient, nous avons tenté d'aborder d'un autre biais des questions analogues à celles qui se trouvaient traitées dans notre précédent Mémoire. La méthode suivie dans le présent travail consiste à tracer, en quelque sorte, la voie qu'il conviendrait de suivre si l'on voulait résoudre d'une manière effective le problème général de l'Électrodynamique, tel que la théorie de H. von Helmholtz le pose pour un système de corps immobiles.

Nous montrons comment la solution de ce problème se ramène à la détermination de quatre fonctions, la fonction potentielle électrostatique et les trois fonctions de Helmholtz. La détermination de la fonction potentielle électrostatique dépend de l'intégration d'une équation

(1) *Sur le diamagnétisme* (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IX, 1913, p. 89).

aux dérivées partielles qui, selon les circonstances, peut être du second ordre ou du troisième ordre. La fonction potentielle électrostatique une fois déterminée, la détermination de chacune des fonctions de Helmholtz résulte de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Pour chacun de ces problèmes, et dans chacun des cas qu'il peut présenter, nous examinons les questions de détermination et de stabilité.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

1. *Grandeurs qui définissent l'état du système étudié.* — Le système étudié se compose de corps homogènes qui sont contigus les uns aux autres le long de surfaces de discontinuité.

Ces corps sont électrisés. L'électrisation du système est définie lorsque l'on connaît, en chaque point intérieur à un corps homogène, la *densité électrique solide* e, et, en chaque point des surfaces de discontinuité, la *densité électrique superficielle* E.

Ces corps sont parcourus par des courants de conduction : ces courants sont déterminés lorsque l'on connaît, en chaque point intérieur à un corps homogène, les composantes u, v, w de la *densité du courant de conduction*.

En tout point intérieur à un corps homogène, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial e}{\partial t}=0. \tag{1}$$

Soient :

S, la surface le long de laquelle se touchent deux corps homogènes 1 et 2;

M, un point de la surface S;

M_1, un point du corps 1, infiniment voisin du point M;

M_2, un point du corps 2, infiniment voisin du point M;

n_1, la demi-normale en M, à la surface S, dirigée vers l'intérieur du corps 1;

n_2, la demi-normale en M, à la surface S, dirigée vers l'intérieur du corps 2;

E, la densité électrique superficielle au point M;

(u_1, v_1, w_1), la densité du courant de conduction au point M_1;

(u_2, v_2, w_2), la densité de courant de conduction au point M_2.

On a, en tout point M de la surface S et à tout instant,

$$\begin{aligned}(2)\qquad & u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ & + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) + \frac{\partial E}{\partial t} = 0.\end{aligned}$$

Les corps du système sont des diélectriques polarisés; les composantes de l'*intensité de polarisation* sont, en un point d'un corps homogène, représentées par A′, B′, C′. Au même point, la *densité du courant de déplacement* a pour composantes

$$(3)\qquad u' = \frac{\partial A'}{\partial t}, \qquad v' = \frac{\partial B'}{\partial t}, \qquad w' = \frac{\partial C'}{\partial t}.$$

Au même point, la *densité du courant total* a pour composantes

$$(4)\qquad \varphi = u + u', \qquad \psi = v + v', \qquad \chi = w + w'.$$

Enfin, les divers corps du système sont aimantés; en un point d'un corps homogène, les composantes de l'*intensité d'aimantation* sont A, B, C.

2. *Fonctions employées.* — Au moyen des grandeurs que nous venons d'énumérer, on compose certaines fonctions dont nous allons rappeler les définitions.

Nous considérerons, en premier lieu, la *fonction potentielle des charges électriques* répandues sur le système. Au point (ξ, η, ζ), cette fonction a pour valeur

$$(5)\qquad V(\xi, \eta, \zeta) = \int \frac{e}{r} d\varpi + \int \frac{E}{r} dS.$$

$d\varpi$ est un élément de volume d'un corps homogène;

dS, un élément d'une surface de discontinuité;

r, la distance, soit de l'élément $d\varpi$, soit de l'élément dS, au point (ξ, η, ζ);

enfin la première intégrale s'étend à tous les volumes homogènes, la seconde à toutes les surfaces de discontinuité.

La *fonction potentielle de la polarisation diélectrique* a pour valeur

$$(6)\qquad V'(\xi, \eta, \zeta) = \int \left(A' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi;$$

(x, y, z) est un point de l'élément $d\varpi$.

Nous aurons également à considérer les trois fonctions :

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U}(\xi, \eta, \zeta) = \int \Big[& \frac{1+k}{2} \frac{\varphi}{r} \\ & + \frac{1-k}{2} \frac{x-\xi}{r} \left(\frac{x-\xi}{r} \varphi + \frac{y-\eta}{r} \psi + \frac{z-\zeta}{r} \chi \right) \Big] d\varpi, \\ \mathfrak{V}(\xi, \eta, \zeta) = \int \Big[& \frac{1+k}{2} \frac{\psi}{r} \\ & + \frac{1-k}{2} \frac{y-\eta}{r} \left(\frac{x-\xi}{r} \varphi + \frac{y-\eta}{r} \psi + \frac{z-\zeta}{r} \chi \right) \Big] d\varpi, \\ \mathfrak{W}(\xi, \eta, \zeta) = \int \Big[& \frac{1+k}{2} \frac{\chi}{r} \\ & + \frac{1-k}{2} \frac{z-\zeta}{r} \left(\frac{x-\xi}{r} \varphi + \frac{y-\eta}{r} \psi + \frac{z-\zeta}{r} \chi \right) \Big] d\varpi; \end{aligned} \right.$$

k est une constante numérique, la *constante de Helmholtz*.

La *fonction potentielle magnétique* a pour valeur, au point (ξ, η, ζ),

$$(8)\qquad V(\xi, \eta, \zeta) = \int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Nous lui adjoindrons les trois fonctions

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \int \left(C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi, \\ \Psi(\xi, \eta, \zeta) &= \int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\varpi, \\ X(\xi, \eta, \zeta) &= \int \left(B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi. \end{aligned} \right.$$

3. *Propriétés analytiques, en tout point d'un milieu continu, des diverses fonctions employées.* — En vertu de leur définition même, ces fonctions possèdent diverses propriétés; nous allons rappeler celles dont nous aurons à faire usage, en commençant par celles qui sont vérifiées en tout point d'un milieu continu.

En tout point d'un tel milieu, on a :

$$\Delta \Upsilon = -4\pi e; \tag{10}$$

$$\Delta V' = 4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z}\right); \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \mathfrak{U} &= -4\pi\varphi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial x\,\partial t}, \\ \Delta \mathfrak{V} &= -4\pi\psi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial y\,\partial t}, \\ \Delta \mathfrak{W} &= -4\pi\chi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial z\,\partial t}; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = -k\frac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial t}; \tag{13}$$

$$\Delta V = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right); \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \Phi &= 4\pi\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \\ \Delta \Psi &= 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right), \\ \Delta X &= 4\pi\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right); \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0; \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi A, \\ \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi B, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi C. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

4. *Propriétés analytiques, en tout point d'une surface de discontinuité, des diverses fonctions employées.* — Au passage de la surface de contact de deux milieux continus, 1 et 2, la fonction Υ demeure continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont dis-

continues et vérifient la relation

$$(18)\qquad \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2} = -4\pi \mathrm{E}.$$

Au passage d'une surface de discontinuité, la fonction V′ est continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(19)\quad \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial n_2} = 4\pi\big[\;\mathrm{A}'_1 \cos(n_1, x) + \mathrm{B}'_1 \cos(n_1, y) + \mathrm{C}'_1 \cos(n_1, z) + \mathrm{A}'_2 \cos(n_2, x) + \mathrm{B}'_2 \cos(n_2, y) + \mathrm{C}'_2 \cos(n_2, z)\big].$$

Au passage d'une surface de discontinuité, les fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

En tout point d'une telle surface, la fonction V est continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(20)\quad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n_2} = 4\pi\big[\;\mathrm{A}_1 \cos(n_1, x) + \mathrm{B}_1 \cos(n_1, y) + \mathrm{C}_1 \cos(n_1, z) + \mathrm{A}_2 \cos(n_2, x) + \mathrm{B}_2 \cos(n_2, y) + \mathrm{C}_2 \cos(n_2, z)\big].$$

En tout point d'une surface de discontinuité, les trois fonctions Φ, Ψ, X demeurent continues; leurs dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(21)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = 4\pi\big[\;\mathrm{C}_1 \cos(n_1, y) - \mathrm{B}_1 \cos(n_1, z) + \mathrm{C}_2 \cos(n_2, y) - \mathrm{B}_2 \cos(n_2, z)\big]$$

et deux relations analogues.

5. *Équations des mouvements électrique et magnétique.* — En vertu des lois, données par H. von Helmholtz, de l'induction électrodynamique et électromagnétique, les composantes de la densité de courant de conduction vérifient, en chaque point, les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial(\Upsilon + \mathrm{V}')}{\partial x} - \dfrac{a^2}{2\rho}\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \\[2ex] v = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial(\Upsilon + \mathrm{V}')}{\partial y} - \dfrac{a^2}{2\rho}\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}, \\[2ex] w = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial(\Upsilon + \mathrm{V}')}{\partial z} - \dfrac{a^2}{2\rho}\dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}. \end{cases}$$

Dans ces équations,

ε' est la constante des actions électrostatiques,

$\frac{a^2}{2}$ la constante des actions électrodynamiques,

ρ la résistance spécifique du milieu.

La théorie de Helmholtz nous apprend également que les composantes A′, B′, C′ de l'intensité de polarisation diélectrique vérifient les équations

$$(23)\quad \begin{cases} A' = -\varepsilon' K' \dfrac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial x} - \dfrac{a^2}{2} K' \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \dfrac{a}{\sqrt{2}} K' \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ B' = -\varepsilon' K' \dfrac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial y} - \dfrac{a^2}{2} K' \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} - \dfrac{a}{\sqrt{2}} K' \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}, \\ C' = -\varepsilon' K' \dfrac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial z} - \dfrac{a^2}{2} K' \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} - \dfrac{a}{\sqrt{2}} K' \dfrac{\partial X}{\partial t}. \end{cases}$$

Dans ces équations, K′ est le coefficient de polarisation diélectrique du milieu.

Enfin les composantes A, B, C de l'aimantation vérifient les trois équations

$$(24)\quad \begin{cases} A = -\varepsilon K \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} \right), \\ B = -\varepsilon K \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \right), \\ C = -\varepsilon K \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Dans ces équations, ε est la constante des actions magnétiques et K le coefficient d'aimantation.

6. *Position du problème général de l'Électrodynamique pour un système immobile.* — Posons

$$(25)\quad \Upsilon + V' = W$$

et donnons à cette fonction W le nom de *fonction potentielle électrostatique totale.*

Posons également

$$
(26)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \Phi &= \mathcal{F},\\
\frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \Psi &= \mathcal{G},\\
\frac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \mathrm{X} &= \mathcal{H},
\end{aligned}
\right.
$$

et donnons aux fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ le nom de *fonctions totales de Helmholtz*.

Si l'on connaît la fonction potentielle électrostatique totale W *et les trois fonctions totales de Helmholtz* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, *on peut déterminer toutes les grandeurs qui définissent l'état du système* et qui ont été énumérées au n° **1**.

En effet, en vertu des égalités (25) et (26), les égalités (22) et (23) peuvent s'écrire :

$$
(27)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= -\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t},\\
v &= -\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t},\\
w &= -\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(28)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A' &= -\varepsilon' K'\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{aK'}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t},\\
B' &= -\varepsilon' K'\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{aK'}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t},\\
C' &= -\varepsilon' K'\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{aK'}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte de ces équations que la connaissance des quatre fonctions W, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ entraîne la connaissance des composantes u, v, w de la densité du courant de conduction et des trois composantes A', B', C' de la polarisation diélectrique.

La connaissance de ces trois dernières détermine, par les égalités (3), les composantes de la densité du courant de déplacement.

D'autre part, les égalités (11), (12) et (25) donnent, en chaque

point d'un corps homogène appartenant au système,

$$\Delta W - 4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z}\right) = -4\pi e.$$

De même, les égalités (18), (19) et (25) donnent, en chaque point d'une surface de discontinuité,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{\partial W}{\partial n_2} - 4\pi[\; & A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z)] \\ & + A'_2 \cos(n_2, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z)] = -4\pi E.\end{aligned}$$

W étant connu ainsi que A', B', C', ces égalités font connaître, en tout point d'un corps homogène, la densité électrique solide e, et, en tout point d'une surface de discontinuité, la densité électrique superficielle E.

Les égalités (24) et (26) donnent les égalités

$$\begin{aligned}A &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right),\\ B &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x}\right),\\ C &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

que les égalités (17) transforment en

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}A &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right),\\ B &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right),\\ C &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right).\end{aligned}\right.$$

Lorsque l'on connaît les fonctions totales de Helmholtz, ces égalités font connaître, en tout point du système, les composantes A, B, C de l'aimantation.

La proposition énoncée est ainsi justifiée.

Le problème général de l'Électrodynamique pour un système immobile consiste donc à déterminer les valeurs prises, en chaque point du système et à chaque instant, par les quatre fonctions W, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$.

7. *Conditions aux limites.* — Cette détermination est subordonnée à certaines conditions qui constituent les données du problème. Certaines de ces conditions doivent être vérifiées, quel que soit le temps t, en tout point de la surface fermée Σ qui borne le système; certaines autres doivent être vérifiées en tout point du système, mais seulement à l'instant initial.

En un point de la surface Σ qui limite le système, nous désignerons par N la normale dirigée vers l'intérieur du système. Nous supposerons alors que l'on connaisse, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant t,

La valeur de W ou la valeur de $\frac{\partial W}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{F}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{G}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{H}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N}$.

8. *Conditions initiales.* — A l'instant initial, nous supposons que l'on connaisse, en chaque point du système, les valeurs de W, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$. Ces déterminations doivent être, bien entendu, d'accord avec les conditions aux limites.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE LA FONCTION POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE TOTALE.

9. Différentions la première des égalités (27) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, ajoutons-les membre à membre et observons :

1° Qu'en vertu des égalités (1) et (10),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{\partial V}{\partial t};$$

2° Qu'en vertu des égalités (13), (16), (25) et (26), on a, quel

que soit t,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -k \frac{\partial W}{\partial t}$$

et, partant,

$$(30) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) = -k \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Nous trouvons l'équation

$$(31) \qquad \Delta \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta W - \frac{2\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Différentions la première des égalités (28) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (11) et (30). Nous trouvons l'égalité

$$(32) \qquad \Delta V' + 4\pi\varepsilon' K' \Delta W - 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

Prenons un point sur la surface qui sépare deux masses homogènes quelconques, 1 et 2. En ce point, l'égalité (18) est vérifiée quel que soit t. Différentions-la par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (2); nous trouvons

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}\right) - u_1 \cos(n_1, x) - v_1 \cos(n_1, y) - w_1 \cos(n_1, z)$$
$$- u_2 \cos(n_2, x) - v_2 \cos(n_2, y) - w_2 \cos(n_2, z) = 0.$$

Dans cette égalité, remplaçons les u, v, w par leurs expressions (27) et observons, comme nous l'avons vu au n° 4, qu'au passage à travers une surface de discontinuité, les dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ varient d'une manière continue; nous trouvons qu'on doit avoir, en tout point d'une telle surface de discontinuité, l'équation

$$(33) \qquad \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2} \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.$$

Enfin, dans l'équation (19), remplaçons les A', B', C' par leurs expressions (28), en observant qu'une surface de discontinuité laisse continues les dérivées partielles du premier ordre de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par

rapport à x, y, z; nous trouvons l'équation

$$(34)\qquad \frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2} + 4\pi\varepsilon' K_1 \frac{\partial W}{\partial n_1} + 4\pi\varepsilon' K_2 \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.$$

Les quatre égalités (31), (32), (33) et (34) vont nous conduire à la détermination de la fonction potentielle électrostatique totale W. Nous allons, en effet, en déduire des équations où ne figurent plus que W et ses dérivées partielles.

10. Différentions l'égalité (32) par rapport à t et, membre à membre, ajoutons l'égalité obtenue à l'égalité (31); souvenons-nous que

$$(25)\qquad V + V' = W,$$

et posons, pour abréger,

$$(35)\qquad U = \frac{W}{\rho} + K' \frac{\partial W}{\partial t};$$

nous trouverons l'équation

$$(36)\qquad \Delta \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \Delta U - 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre que W doit vérifier en tout point d'un corps homogène appartenant au système.

Différentions l'égalité (34) par rapport à t et, membre à membre, ajoutons l'égalité obtenue à l'égalité (33), en tenant compte des égalités (25) et (35); nous trouvons l'égalité

$$(37)\qquad \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \left(\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) = 0.$$

Telle est la condition que doit vérifier la fonction W en tout point appartenant à une des surfaces de discontinuité du système.

Le premier des trois problèmes qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer, dans tout le système, une fonction W qui satisfasse aux conditions (36) et (37), lorsque l'on connaît, à chaque instant, les valeurs prises par cette fonction W en chacun des points de la sur-

face Σ qui limite le système, et, à l'instant initial, les valeurs prises par certaines grandeurs convenablement choisies.

11. Supposons d'abord, et jusqu'à nouvel ordre, que la constante k de Helmholtz soit différente de zéro. Il est clair que, sans contredire aux équations (36) et (37), nous pouvons, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en chaque point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, sous les seules restrictions suivantes :

1° En chaque point de chacune des surfaces de discontinuité du système, ces valeurs vérifient l'équation (37) et celle qu'on en déduit à l'aide d'une différentiation par rapport à t;

2° En chaque point de la surface qui limite le système, W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ prennent les valeurs données.

L'équation (36) détermine alors, en chaque point du système et à l'instant initial, la valeur prise par $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$.

12. Nous remarquons ensuite qu'on peut, sans contredire aucunement aux équations (31), (32), (33) et (34), choisir arbitrairement, à un instant donné, en tout point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Ces valeurs une fois choisies, en effet, l'équation (32) nous apprend que $\Delta V'$ est déterminé en chaque point du système; et comme ΔW l'est également, $\Delta \Upsilon = \Delta W - \Delta V'$ est déterminé, à l'instant considéré, en chaque point du système.

L'équation (34) nous apprend qu'en chaque point d'une surface de discontinuité, $\frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2}$ a une valeur déterminée; mais

$$\frac{\partial W'}{\partial n_1} + \frac{\partial W'}{\partial n_2} = \frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}$$

a également, à ce même instant et en ce même point, une valeur déterminée; il en est donc de même de $\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}$.

L'équation (31) nous apprend qu'à l'instant considéré et en chaque

point du système, $\Delta\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}$ a une valeur déterminée; comme il en est de même de $\frac{\partial W}{\partial t}$ et, partant, de $\Delta\frac{\partial W}{\partial t}$, il en est aussi de même de $\Delta\frac{\partial V'}{\partial t}$.

Enfin l'équation (33) nous apprend qu'en chaque point d'une surface de discontinuité, à l'instant considéré, $\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}$ a une valeur déterminée; comme il en est de même de

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial W'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial W'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial V'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial V'}{\partial t},$$

on voit qu'à cet instant et en ce point, $\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial V'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial V'}{\partial t}$ a une valeur déterminée.

Si l'on tient compte des égalités (1), (3), (10) et (12), on voit qu'en chaque point du système, à l'instant considéré, les quantités

$$e,$$
$$\frac{\partial A'}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}+\frac{\partial C'}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}+\frac{\partial w'}{\partial z}$$

ont des valeurs déterminées.

Si l'on tient compte des égalités (2), (3), (18) et (19), on voit qu'à l'instant considéré, en chaque point d'une surface de discontinuité appartenant au système, les quantités

$$E,$$
$$A'_1\cos(n_1,x)+B'_1\cos(n_1,y)+C'_1\cos(n_1,z)$$
$$+A'_2\cos(n_2,x)+B'_2\cos(n_2,y)+C'_2\cos(n_2,z),$$
$$u_1\cos(n_1,x)+v_1\cos(n_1,y)+w_1\cos(n_1,z)$$
$$+u_2\cos(n_2,x)+v_2\cos(n_2,y)+w_2\cos(n_2,z),$$
$$u'_1\cos(n_1,x)+v'_1\cos(n_1,y)+w'_1\cos(n_1,z)$$
$$+u'_2\cos(n_2,x)+v'_2\cos(n_2,y)+w'_2\cos(n_2,z)$$

ont des valeurs déterminées.

Or, il est facile de déterminer d'une infinité de manières une polarisation diélectrique telle qu'en chaque point du système,

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = f,$$

et qu'en chaque point d'une surface de discontinuité,

$$A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z)$$
$$+ A'_2 \cos(n_2, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z) = F,$$

f et F ayant des valeurs données. Voici, en particulier, une solution immédiate de ce problème :

Posons

$$P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r}\,d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int \frac{F}{r}\,dS,$$

la première intégrale s'étendant au volume entier du système et la seconde à toutes les surfaces de discontinuité ; et prenons ensuite en chaque point

$$A' = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad B' = -\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad C' = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ce que nous venons de dire de la polarisation diélectrique se peut répéter des courants de conduction (u, v, w) et des courants de déplacement (u', v', w').

On voit donc qu'on peut, lorsqu'on a choisi arbitrairement, à un instant donné et en chaque point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, déterminer, en chaque point de ce système, la densité électrique solide ou superficielle, la polarisation diélectrique, la densité du courant de conduction et la densité du courant de déplacement de telle manière que les équations (31), (32), (33) et (34) soient vérifiées.

13. Considérons un des corps homogènes dont le système se compose ; soit $d\varpi$ un élément du volume de ce corps.

Multiplions le premier membre de l'égalité (31) par $\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du corps considéré. Nous obtenons

l'égalité

$$\frac{2\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho}\int\frac{\partial W}{\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,d\varpi=\int\left(\Delta\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\Delta W\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi.$$

Soient S la surface qui limite le corps homogène considéré et, en un point de cette surface, n_i la normale dirigée vers l'intérieur du corps. L'égalité précédente peut se mettre sous la forme que voici :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho}\,\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi\\
&=-\frac{2\pi\varepsilon'}{\rho}\,\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi\\
&\quad-\int\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi\\
&\quad-\int\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\,\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,dS.
\end{aligned}$$

Pour chacun des corps homogènes qui composent le système, écrivons une égalité analogue, et ajoutons membre à membre toutes ces égalités, en tenant compte des égalités (33). Nous obtiendrons ainsi l'égalité

$$\begin{aligned}
(38)\quad &\pi\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\sqrt{2}\,ak}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2+\frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\varpi\\
&=-\int\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\,\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi\\
&\quad-\int\left(\frac{\partial}{\partial N}\,\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}+\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\,\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\Sigma.
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales s'étendent au volume entier du système; la troisième s'étend à la surface qui limite ce système.

Considérons maintenant l'égalité (32); différentions-la par rapport à t, multiplions le résultat par $\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi$ et intégrons pour le volume entier d'un des corps homogènes du système. Nous obtenons ainsi l'égalité

$$2\sqrt{2}\,\pi a k K'\int\frac{\partial W}{\partial t}\,\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\,d\varpi=\int\left(\Delta\frac{\partial \Upsilon'}{\partial t}+4\pi\varepsilon' K'\Delta\frac{\partial W}{\partial t}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi.$$

Cette égalité peut se transformer en la suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi
&= 2\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}' \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \\
&\quad - 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \int \left[\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t}\right) \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\, d\mathrm{S}.
\end{aligned}$$

Pour chacun des corps homogènes qui composent le système, écrivons une égalité analogue; ajoutons membre à membre toutes ces égalités; observons que l'égalité (34), vérifiée à chaque instant en chaque point d'une surface de discontinuité, nous donne aussi, en ce point et à chaque instant, l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}'_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon \mathrm{K}'_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = 0,$$

et nous obtiendrons l'égalité

$$(39)\qquad \begin{aligned}
\pi \frac{d}{dt} \int \sqrt{2}\, a k \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi
&= 2\pi \int \Bigg\{ \sqrt{2}\, a k \mathrm{K}' \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}\right)^2 \\
&\qquad - 2\varepsilon' \mathrm{K}' \left[\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] \Bigg\} d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right) \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\, d\Sigma.
\end{aligned}$$

Ajoutons maintenant membre à membre les deux égalités (38) et (39), en nous souvenant que

$$(25)\qquad \mathrm{V} + \mathrm{V}' = \mathrm{W},$$

et nous trouvons enfin l'égalité que voici :

$$(40)\qquad \pi \frac{d}{dt}\int \left\{ \sqrt{2}\, a k \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + K' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 \right] + \frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} d\varpi$$

$$= -\int (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \right] d\varpi$$

$$+ 2\sqrt{2}\, \pi a k \int K' \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi$$

$$- \int \left[\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial W}{\partial N} + (1 + 4\pi\varepsilon' K') \frac{\partial}{\partial N} \frac{\partial W}{\partial t} \right] \frac{\partial W}{\partial t}\, d\Sigma.$$

Cette égalité fondamentale va nous servir à établir deux propositions importantes.

14. Nous allons examiner, d'abord, si la constante k de Helmholtz peut être négative.

Supposons qu'elle le soit, et voyons quelles conséquences découlent de cette supposition.

La résistance spécifique ρ est positive pour tous les corps.

L'expérience nous apprend qu'il existe assurément des corps pour lesquels le coefficient de polarisation diélectrique K' est positif.

Prenons un ou plusieurs de ces corps pour en composer le système que nous allons étudier; en tout point de la surface Σ qui borne ce système, maintenons à la fonction potentielle électrostatique totale W une valeur indépendante du temps t, la même en tout point de la surface Σ.

$\frac{\partial W}{\partial t}$ étant nul en tout point de la surface Σ, au second membre de l'égalité (40) la dernière intégrale disparaît.

Posons

$$(41)\qquad J = \pi \int \left\{ \sqrt{2}\, a k \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + K' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 \right] + \frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} d\varpi.$$

L'égalité (40) deviendra

$$(42)\quad \frac{dJ}{dt} = -\int(1+4\pi\varepsilon'K')\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi + 2\sqrt{2}\,ak\int K'\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi.$$

Le second membre de cette égalité (42) est forcément négatif, à moins qu'on n'ait simultanément, en tous les points du système, les quatre égalités

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t} = 0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

De ces égalités, les trois premières exigent que la fonction $\frac{\partial W}{\partial t}$, qui est continue dans tout le système, ait même valeur en tous les points de ce système; et comme $\frac{\partial W}{\partial t}$ est nul en tous les points de la surface Σ qui enclôt le système, la valeur en question ne peut être que zéro. Les trois premières égalités précédentes équivalent donc à l'égalité, vérifiée dans tout le système,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Mais au cas où cette dernière égalité serait vérifiée, J, en vertu de l'égalité (41), se réduirait à

$$2\pi\varepsilon'\int\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,$$

quantité qui ne peut être que nulle ou positive. Si donc, à un certain instant, $\frac{dJ}{dt}$ s'annulait, c'est qu'à cet instant, J serait nul ou positif.

Soit J_0 la valeur initiale de J. Nous pouvons évidemment, dans le système, disposer des valeurs initiales de W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ de telle manière que la valeur initiale J_0 soit négative. Cela se peut faire d'une infinité de manières; la suivante est évidente.

La fonction W est seulement assujettie à prendre une valeur donnée en tout point de la surface Σ; donnons-lui cette valeur en tout point du système; nous aurons alors, à l'instant initial, en tout point du

système,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

La fonction $\frac{\partial W}{\partial t}$ est seulement assujettie à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; donnons-lui, aux divers points du système, des valeurs différentes de zéro.

La fonction $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ est seulement assujettie à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; donnons-lui, dans tout le système, la valeur o.

J_0 sera alors la valeur prise, à l'instant initial, par la quantité

$$\sqrt{2}\, ak\pi \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

et cette valeur sera sûrement négative.

Ce que nous savons de J_0 et de $\frac{dJ}{dt}$ nous apprend que la quantité J sera constamment négative, qu'elle décroîtra constamment, et que sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Pour cela, il faut et il suffit ou bien que

$$\int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t, ou bien que la quantité

$$\frac{d}{dt} \int K' \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

soit, à partir d'une certaine valeur de t, constamment positive et qu'elle croisse au delà de toute limite avec t. Mais alors, on peut affirmer que la quantité

$$\int K' \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

croîtra au delà de toute limite avec t.

Les propositions démontrées ne peuvent être exactes que si celle-ci l'est aussi : La valeur absolue de la quantité $\frac{\partial W}{\partial t}$ croît au delà de toute limite avec t, au moins en certains points du système.

D'ailleurs, comme $\frac{\partial W}{\partial t}$ demeure constamment nul en tout point de la surface Σ qui entoure le système, la proposition précédente entraîne celle-ci : Il existe dans le système au moins certains points où les valeurs absolues des quantités $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t}$ croissent au delà de toute limite avec t.

De cette proposition, tirons une conclusion dont la signification physique soit plus claire.

Imaginons que l'équilibre électrique et magnétique soit établi sur notre système borné par une surface Σ en tout point de laquelle la fonction potentielle électrostatique totale W a la même valeur. On sait alors que W a aussi cette même valeur en tout point intérieur au système. Il n'y a, à l'intérieur de ce système, ni charge électrique ni polarisation diélectrique.

A ce système, imposons une perturbation initiale définie comme nous venons de le faire, et maintenons invariable la valeur uniforme du niveau potentiel électrostatique total auquel est portée la surface qui le termine. Il y aura certainement, dans le système, des points où la valeur absolue de la vitesse avec laquelle varie la fonction potentielle électrostatique totale croîtra au delà de toute limite avec le temps. Cela peut assurément être regardé comme marquant l'instabilité de l'équilibre électrique du système considéré.

Ainsi, si la constante k était négative, l'équilibre électrique serait instable sur un système à la fois conducteur et diélectrique dont on maintient la surface à un niveau potentiel électrostatique uniforme et constant.

La supposition que la constante k de Helmholtz est négative entraîne une impossibilité physique.

15. On ne peut donc attribuer à la constante k de Helmholtz qu'une valeur nulle ou positive. Réservons pour plus tard le cas où cette constante serait nulle, et supposons-la positive :

$$k > 0. \tag{43}$$

Imaginons qu'il existe un ou plusieurs corps dont le coefficient de

polarisation diélectrique soit négatif :

(44) $$K' < 0,$$

mais dont le pouvoir inducteur spécifique soit positif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' > 0.$$

Imaginons que le système soit formé d'un tel corps ou de plusieurs tels corps.

Pour ce système, écrivons encore les égalités (41) et (42). Ces égalités nous apprendront :

1° Que $\frac{dJ}{dt}$ est forcément négatif ou nul;

2° Que si $\frac{dJ}{dt}$ est nul, J est nécessairement positif ou nul.

Dès lors, si l'on peut s'arranger de telle sorte que la valeur initiale J_0 de J soit négative, J demeurera négatif quel que soit t, et sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Mais on peut évidemment faire en sorte que J_0 soit négatif. On y parviendra, par exemple, de la façon suivante :

W est assujetti seulement à prendre une valeur donnée sur la surface Σ. A l'instant initial, on lui donnera cette même valeur en tout point du système.

$\frac{\partial W}{\partial t}$ est assujetti seulement à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; on lui donnera, aux divers points du système, des valeurs arbitraires, mais généralement différentes de zéro.

$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ est assujetti seulement à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; en chaque point du système, donnons-lui une valeur de même signe que $\frac{\partial W}{\partial t}$ et dont la valeur absolue surpasse $\frac{1}{\rho K'}\frac{\partial W}{\partial t}$.

D'ailleurs, pour que J reste négatif quel que soit t et croisse au delà de toute limite avec t, il faut que

$$\int K' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeure sans cesse négatif et que sa valeur absolue croisse au delà de toute limite avec t.

En reproduisant ce qui a été dit au numéro précédent, on voit que *si l'on maintient invariable la valeur uniforme du niveau potentiel électrostatique total à la surface du système considéré, l'équilibre électrique sera instable sur ce système.*

16. La constante k de Helmholtz ne peut être négative, et nous sommes convenus de laisser provisoirement de côté le cas où elle serait nulle.

Le coefficient de polarisation diélectrique K' ne peut être négatif, et nous renvoyons à un autre Chapitre l'étude des corps non diélectriques pour lesquels il serait nul.

Nous allons donc nous borner à étudier le cas où nous avons les deux inégalités

$$k > 0, \tag{45}$$

$$K' > 0. \tag{46}$$

Une nouvelle égalité va nous fournir certaines propositions relatives à ce cas.

Multiplions les deux membres de l'égalité (36) par $\frac{\partial U}{\partial t} d\varpi$ et intégrons pour tous les éléments de volume de l'un des corps homogènes qui forment le système. Nous trouvons l'égalité

$$\int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\Delta \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \Delta U\right) d\varpi - 2\sqrt{2}\,\pi a k \int \frac{\partial U}{\partial t}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\, d\varpi = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt} \int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\ &+ 2\pi\varepsilon' \frac{d}{dt} \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \\ &+ \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\ &+ \int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \frac{\partial U}{\partial n_i}\right) dS = 0. \end{aligned}$$

Mais, en vertu de l'égalité (33),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \frac{K'}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \frac{K'}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}\,\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2 + \frac{K'}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \Big\{ \sqrt{2}\,\pi a k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 &+ 2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] \\ &+ \frac{K'}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\Big\}\,d\varpi \\ = -\int \frac{1}{\rho}&\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\,\frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon'\frac{\partial U}{\partial n_i}\right) dS.\end{aligned}$$

Écrivons une telle égalité pour chacun des corps homogènes qui constituent le système, et ajoutons toutes ces égalités membre à membre en tenant compte de l'égalité (37). Nous trouverons l'égalité

$$(47)\quad \begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \Big\{ \sqrt{2}\,\pi a k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 &+ 2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] \\ &+ \frac{K'}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\Big\}\,d\varpi \\ = -\int \frac{1}{\rho}&\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ &- \int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial N}\,\frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon'\frac{\partial U}{\partial N}\right) d\Sigma.\end{aligned}$$

Cette égalité (47) va nous permettre de démontrer deux propositions importantes si nous supposons, conformément aux inégalités (43) et (46), que *la constante k de Helmholtz est positive* et que, *pour tous les corps du système, le coefficient de polarisation diélectrique* K' *est positif.*

17. La première de ces propositions sera la suivante :

Si la valeur de la fonction W *est donnée, à chaque instant, en tout point de la surface qui limite le système; si, à l'instant initial, les valeurs de* W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ *sont données dans tout le système, il ne saurait exister deux intégrales continues distinctes des équations* (36) *et* (37).

Imaginons, en effet, que deux intégrales W′, W″, des équations (36) et (37), vérifient également la condition aux limites et les conditions initiales qui viennent d'être définies; posons

$$W = W'' - W';$$

W sera encore une intégrale des équations (36) et (37), en sorte que cette différence vérifiera l'égalité (47).

Mais, en chaque point de la surface Σ, W′ et W″ prennent, à chaque instant, la même valeur donnée; sur la surface Σ donc, leur différence W est constamment nulle; il en est, dès lors, de même de $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ et de

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Au second membre de l'égalité (47), le second terme disparaît; il ne reste que le premier, qui ne peut être positif.

Posons

$$(48)\quad L = \int \left\{ \sqrt{2}\,\pi a k \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + 2\pi\varepsilon' \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{K'}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \right] \right\} d\varpi.$$

L'égalité (47) nous enseigne maintenant que L ne peut être une fonction croissante de t. Cette quantité L, d'ailleurs, ne peut être négative; si donc elle est nulle à un instant quelconque, elle sera nulle à tout instant postérieur à celui-là.

Mais, à l'instant initial, on a, en tout point du système,

$$W' = W'', \qquad \frac{\partial W'}{\partial t} = \frac{\partial W''}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2}$$

et, par conséquent,

$$W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

La valeur initiale de L étant o, on a, quel que soit t,

$$(49) \qquad L = 0.$$

Pour que cette égalité (49) soit vérifiée, il faut et il suffit qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Les égalités de la seconde ligne peuvent, en vertu de la définition (35) de U, s'écrire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial y} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial z} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Combinées avec les égalités de la troisième ligne, elles donnent les égalités

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

En vertu de ces égalités, W qui est, dans tout le système, une fonction continue de x, y, z, aura même valeur, à chaque instant, dans tout le système; mais sur la surface qui borde ce système, W est constamment nul; on a donc, à tout instant et en tout point du système,

$$W = 0$$

ou

$$W' = W'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Au lieu de supposer que la valeur donnée, en tout point de la surface et à tout instant, soit celle de W, on peut supposer qu'elle soit celle de $\frac{\partial W}{\partial N}$; la démonstration précédente peut se reprendre presque textuellement; elle nous apprend que les deux solutions W′ et W″ du problème ne peuvent différer l'une de l'autre que par une quantité indépendante de x, y, z, t.

18. Avant d'énoncer et de démontrer la seconde proposition, définissons ce que nous entendrons par *stabilité électrostatique intégrale*.

Imaginons qu'en chaque point de la surface Σ qui limite le système étudié, la fonction potentielle électrostatique totale W garde une valeur indépendante de t, la même en tous les points de la surface Σ. Sur un tel système, l'équilibre électrostatique est possible. S'il est établi, la fonction W a même valeur dans toute l'étendue du système: le *champ électrostatique total*, dont les composantes sont

$$(50) \qquad X = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad Z = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial z},$$

est nul en tout point du système; il en est de même de la *vitesse de variation de ce champ*, dont les composantes sont

$$(51) \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t},$$

et de l'*accélération de la variation de ce champ*, dont les composantes sont

$$(52) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial x\, \partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial x\, \partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial z\, \partial t^2}.$$

Prenons notre système à la surface duquel la fonction W garde une valeur uniforme et constante, puis, en chaque point de ce système et à l'instant initial, donnons des valeurs généralement différentes de zéro au champ électrique, à la vitesse et à l'accélération de la variation de ce champ; à l'instant t, le champ aura en général, au sein du système, une valeur différente de zéro. *Si, aux valeurs absolues initiales du champ, de la vitesse et de l'accélération de sa variation, on peut,*

dans tout le système, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$(53)\qquad \int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi < P.$$

P *étant une quantité positive quelconque donnée d'avance, nous dirons que le système possède la stabilité électrostatique intégrale.*

19. Cette définition posée, nous allons démontrer que *le système considéré possède la stabilité électrostatique intégrale.*

En chaque point de la surface Σ, la fonction W garde une valeur indépendante du temps; en ce point, donc, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ et, partant, $\frac{\partial U}{\partial t}$ sont des quantités nulles; au second membre de l'égalité (47), le second terme disparaît; il n'y demeure que le premier terme qui ne peut être négatif. Si donc on garde à L le sens que définit l'égalité (47), cette quantité L ne pourra pas être fonction croissante de t; en désignant par L_0 sa valeur initiale, nous pourrons écrire

$$(54)\qquad L \leq L_0.$$

Cette inégalité (54) exige qu'on ait les deux inégalités

$$(55)\qquad \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi \leq \frac{L_0}{2\pi\varepsilon'},$$

$$(56)\qquad \int K\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi \leq 2L_0.$$

D'autre part, nous avons, par les égalités (50),

$$\int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi = \varepsilon'^2\int\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Si R désigne la plus grande valeur que prenne, au sein du système, la résistance spécifique ρ, cette égalité nous permettra d'écrire

$$(57)\qquad \int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi \leq \varepsilon'^2 R^2\int\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

L'identité

$$(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)-(a+b)^2$$

donne l'inégalité

(58) $$(a-b)^2 \leqq 2(a^2+b^2).$$

Or, l'égalité (35) nous permet d'écrire

$$\int \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$=\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

L'inégalité (58) nous donne alors

(59) $$\int \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$\leqq 2\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$+2\int K'^2\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Soit χ' la plus grande valeur que prenne, au sein du système, le coefficient de polarisation diélectrique K'. Nous aurons

(60) $$\int K'^2\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$
$$\leqq \chi'\int K'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Les inégalités (55), (56), (57), (59) et (60) nous fournissent l'inégalité suivante :

(61) $$\int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi \leqq \frac{(1+4\pi\varepsilon'\chi')R^2}{\pi\varepsilon'}L_0.$$

L'inégalité (53) sera donc certainement vérifiée, quel que soit t, si l'on a

(62) $$L_0 < \frac{\pi\varepsilon'}{(1+4\pi\varepsilon'\chi')R^2}P.$$

Pour que la proposition énoncée soit démontrée, il suffit désormais d'établir ceci : Aux valeurs absolues initiales du champ électrique total, de la vitesse et de l'accélération de la variation de ce champ, on peut assigner des limites supérieures telles que L_0 soit sûrement inférieur à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance.

Or, il est tout d'abord évident qu'on peut assigner ces limites supérieures de telle façon que deux des trois termes dont la somme compose L_0 soient inférieurs à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; les deux termes dont nous voulons parler sont les valeurs initiales de

$$2\pi\varepsilon'\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$

et de

$$\frac{1}{2}\int K'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Reste à établir qu'il en est de même pour la valeur initiale de

$$\sqrt{2}\,\pi a k\int\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Pour cela, il suffit de prouver qu'on peut assigner les limites supérieures en question de telle manière que la valeur absolue de

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

soit inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance. Prouvons-le.

L'égalité précédente donne

$$\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\leqq\frac{1}{\rho}\left|\frac{\partial W}{\partial t}\right|+K'\left|\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right|.$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ sont nuls en tout point de la surface Σ qui borne le système. Soient donc :

M un point quelconque du système,
M_0 un point de la surface Σ,
M_0M un trajet quelconque joignant le point M_0 au point M.

Nous aurons, au point M,

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int_{M_0M}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}dx+\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}dy+\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}dz\right),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\int_{M_0M}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x\,\partial t^2}dx+\frac{\partial^3 W}{\partial y\,\partial t^2}dy+\frac{\partial^3 W}{\partial z\,\partial t^2}dz\right).$$

Soient λ et μ les plus grandes valeurs absolues initiales prises, au sein du système, par la vitesse et par l'accélération de la variation du champ; soit D la plus courte distance du point M à la surface Σ. Nous aurons, à l'instant initial,

$$\left|\frac{\partial W}{\partial t}\right| < \frac{\lambda D}{\varepsilon'}, \qquad \left|\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right| < \frac{\mu D}{\varepsilon'}$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right| < \left(\frac{\lambda}{\rho} + \mu K'\right)\frac{D}{\varepsilon'}.$$

Il est évident qu'on peut limiter supérieurement λ et μ de telle manière que la valeur absolue initiale de $\frac{\partial U}{\partial t}$ soit, en tout point du système, inférieure à une quantité positive quelconque donnée d'avance.

La proposition énoncée est donc démontrée.

20. Cette proposition est complétée par celle que nous allons établir.

Au second membre de l'égalité (47), le second terme est, nous l'avons vu, égal à zéro. Dès lors, en vertu des égalités (48) et (51), cette égalité (47) peut s'écrire

$$(63) \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon'^2}\int \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi.$$

La quantité L possède ces deux caractères :

Elle ne peut jamais être négative;

Elle n'est jamais fonction croissante de t.

Dès lors, elle admet une limite inférieure positive ou nulle; ou bien elle atteint cette limite à un certain instant et lui demeure ensuite constamment égale; ou bien elle tend vers cette limite lorsque t croît indéfiniment.

Dans le premier cas, à partir d'un certain instant, $\frac{dL}{dt}$ demeure constamment égal à zéro; dans le second cas, $\frac{dL}{dt}$ tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

En tous cas, on peut donner à t une valeur assez grande pour que

la somme

$$\int \left[\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi$$

relative à chacun des corps homogènes du système et, partant, pour que la même somme relative à tout le système soit désormais plus petite que n'importe quelle quantité positive donnée d'avance.

Il en résulte que *t croissant indéfiniment, la vitesse de variation du champ tend vers zéro en tout point du système, sauf peut-être en certains points qui ne composent pas un volume fini.*

21. Venons maintenant à l'examen du cas, délaissé jusqu'ici, où la constante de Helmholtz est nulle :

$$k = 0. \tag{64}$$

Dans ce cas, si l'on tient compte de l'expression (35) de U, l'égalité (36) devient

$$(1 + 4\pi\varepsilon' K') \Delta \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta W = 0, \tag{65}$$

tandis que l'égalité (37) devient

$$\begin{aligned} &(1 + 4\pi\varepsilon K'_1) \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial W}{\partial t} \\ &+ (1 + 4\pi\varepsilon' K'_2) \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2} \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Il est immédiatement évident qu'on ne peut plus, à l'instant initial, choisir arbitrairement dans tout le système les valeurs de W, de $\frac{\partial W}{\partial t}$, de $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Si, à un instant donné, W a, en tout point du système, une valeur connue; si, au même instant, $\frac{\partial W}{\partial t}$ a une valeur connue en chaque point de la surface Σ qui borne le système, on sait qu'il ne peut exister deux déterminations distinctes pour la valeur prise par $\frac{\partial W}{\partial t}$ en chaque point du système.

En s'appuyant sur ce premier résultat et sur les égalités qu'on

obtient en différentiant les égalités (65) et (66) par rapport à t, on peut établir cette autre proposition :

Si l'on connaît en outre, à l'instant considéré, la valeur prise par $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ en chaque point de la surface Σ, la valeur de $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ en chaque point du système n'est pas susceptible de deux déterminations distinctes.

Supposons, en particulier, que W prenne, en tout point de la surface Σ, une même valeur C indépendante du temps t. $\frac{\partial W}{\partial t}$ sera alors constamment égal à zéro en tout point de la surface Σ. On vérifiera cette condition et les équations (65) et (66) si l'on pose, en tout point du système,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}(W - C). \tag{67}$$

D'après ce qui vient d'être dit, ce sera certainement la valeur de $\frac{\partial W}{\partial t}$.

L'égalité (67), vérifiée dans tout le système, nous donnera, d'ailleurs, les égalités

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

dont nous aurons à faire usage.

Si donc la surface terminale du système est maintenue à un niveau potentiel électrostatique total uniforme et constant C, si l'on désigne par W_0, X_0, Y_0, Z_0 les valeurs initiales de W et des composantes X, Y, Z du champ électrostatique total, on aura, en vertu des égalités (67) et (68),

$$W - C = (W_0 - C)\,e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}; \tag{69}$$

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} X &= X_0\,e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}, \\ Y &= Y_0\,e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}, \\ Z &= Z_0\,e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}. \end{aligned}\right.$$

22. Les équations (70) conduisent aux conclusions suivantes :

En chaque point du système, le champ électrostatique total garde, au cours du temps, une direction invariable.

Si le pouvoir inducteur spécifique d'un des corps du système est négatif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' < 0,$$

en tout point de ce corps où la valeur initiale du champ électrostatique total n'est pas nulle, la valeur absolue de ce champ croît au delà de toute limite avec le temps. Sur un tel système, donc, l'équilibre électrique est instable.

Si, pour tous les corps du système, le pouvoir inducteur spécifique est positif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' > 0,$$

la valeur absolue, en chaque point, du champ électrostatique total décroît sans cesse et tend vers zéro lorsque le temps croît au delà de toute limite; le système possède donc la stabilité électrostatique ponctuelle.

Cette stabilité ponctuelle entraîne, bien entendu, la stabilité intégrale qui se peut d'ailleurs vérifier directement, puisque les égalités (70) donnent l'égalité

$$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi = \int e^{-\frac{8\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t} (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)\, d\varpi.$$

23. *Supposons que le pouvoir inducteur spécifique ne soit nul pour aucun corps du système. Supposons qu'on donne la valeur de* W :

1° *A tout instant, en tout point de la surface* Σ *qui borne le système;*

2° *A l'instant initial, en tout point du système.*

Il ne peut exister deux intégrales distinctes des équations (65) *et* (66).

Supposons, en effet, qu'il en existe deux, W′ et W″, et soit

$$W = W'' - W'.$$

Comme W' et W'', W vérifie les équations (66) et (67). En chaque point de la surface Σ, et à chaque instant, W' et W'' prennent la même valeur; W est donc constamment nul sur la surface Σ. Dès lors, W vérifiera l'égalité (69) après qu'on y aura donné à C la valeur zéro.

D'autre part, en tout point du système, W' et W'' ont même valeur initiale; W_0 est donc nul en tout point du système. L'égalité (69) montre alors que W est nul, en tout temps, dans tout le système, ce qui démontre la proposition énoncée.

Une partie des propositions qui viennent d'être établies pourraient être déduites soit de l'égalité (40), soit de l'égalité (47); mais cette déduction, moins rapide que la précédente, fournit des résultats moins complets.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS TOTALES DE HELMHOLTZ.

24. Supposons désormais qu'on ait déterminé la fonction potentielle électrostatique totale W, et voyons comment on déterminera les fonctions totales de Helmholtz $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$.

Les égalités (3), (4), (27) et (28) nous donnent

$$\varphi = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right) - K'\left(\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} + \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}\right).$$

Cette égalité, jointe aux égalités (12) et (25), donne

(71) $$\Delta \mathfrak{V} = \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x} + (4\pi\varepsilon' K' - k + 1) \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} + \frac{2\sqrt{2}\,\pi a}{\rho} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + 2\sqrt{2}\,\pi a K' \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}.$$

D'autre part, les égalités (24) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)\right]$$

ou bien, en vertu des égalités (13) et (24),

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \Delta \mathfrak{V} + \frac{\varepsilon a k K}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}.$$

La première égalité (15) devient alors

$$(72) \qquad \Delta \Phi = 2\sqrt{2}\,\pi \varepsilon a K \,\Delta \mathfrak{V} + 2\sqrt{2}\,\pi \varepsilon a k K \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (71) par $\frac{a}{\sqrt{2}}(1 + 4\pi\varepsilon K)$ et, membre à membre, ajoutons le résultat obtenu et l'égalité (72), en observant que

$$(27) \qquad \frac{a}{\sqrt{2}} \mathfrak{V} + \Phi = \mathfrak{F},$$

et nous trouvons la première des trois égalités suivantes :

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Delta \mathfrak{F} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} \\ & \quad = \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}, \\ & \Delta \mathfrak{G} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial t^2} \\ & \quad = \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial t}, \\ & \Delta \mathfrak{H} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} \\ & \quad = \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial z \, \partial t}. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières égalités (73) s'établissent par une démonstration analogue.

Dans ces égalités,

$$(74) \qquad \mu = 1 + 4\pi\varepsilon K$$

est la *perméabilité magnétique* du corps considéré et

$$(75) \qquad D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$$

en est le *pouvoir inducteur spécifique*.

Chacune des trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ vérifie une équation aux dérivées partielles dont le second membre est connu lorsque la fonction W est déterminée.

Nous savons, par le n° 4, que la traversée d'une des surfaces de discontinuité du système n'introduit aucune discontinuité dans les dérivées partielles du premier ordre de chacune des fonctions $\mathfrak{V}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{W}$.

D'autre part, en vertu des égalités (24), l'égalité (21) devient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 2\sqrt{2}\,\pi\varepsilon a \mathrm{K}\left\{ \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial x}\right)[\cos(n_1, y) + \cos(n_2, y)] + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)[\cos(n_1, z) + \cos(n_2, z)]\right\}$$

ou

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 0.$$

Le magnétisme doit donc se distribuer sur le système de telle façon que les dérivées partielles de la fonction Φ ne subissent, elles non plus, aucune discontinuité à la traversée de l'une des surfaces de discontinuité du système. Il en est de même des fonctions Ψ et X.

Dès lors, les égalités (26) nous apprennent que, dans tout le système, les trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

25. Posons, pour abréger,

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}, \\ \mathrm{G} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}, \\ \mathrm{H} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (76) deviennent

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\mathcal{F} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} - 2\pi a^2\mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial t^2} &= \mathrm{F}, \\ \Delta\mathcal{G} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} - 2\pi a^2\mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial t^2} &= \mathrm{G}, \\ \Delta\mathcal{H} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} - 2\pi a^2\mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial t^2} &= \mathrm{H}. \end{aligned}\right.$$

Remarquons de suite que, si $\mu K'$ n'est pas nul, ces équations permettent de choisir arbitrairement, à l'instant initial, les valeurs de

$$\begin{gathered}\mathcal{F}, \quad \mathcal{G}, \quad \mathcal{H}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.\end{gathered}$$

Elles déterminent alors, en tout point du système, les valeurs initiales de

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}.$$

Multiplions par $\mathcal{F} d\varpi$ les deux membres de la première équation (77) et, pour le volume entier du système, intégrons le résultat obtenu; nous trouvons ainsi l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu \left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + K' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) \mathcal{F} \, d\varpi \\ = \int \mathcal{F} \Delta \mathcal{F} \, d\varpi + 2\pi a^2 \int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right)^2 d\varpi - \int F \mathcal{F} \, d\varpi.\end{aligned}$$

Une intégration par parties, portant sur le premier terme du second membre, transforme cette égalité en la suivante :

$$(78) \qquad \begin{aligned}\pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu \left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + K' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) \mathcal{F} \, d\varpi \\ = - \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \right)^2 - 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi \\ - \int F \mathcal{F} \, d\varpi - \int \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} d\Sigma.\end{aligned}$$

Pour les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, on peut écrire deux égalités analogues.

Supposons qu'en tout point de la surface Σ on garde à la fonction W une même valeur C indépendante de t, et aux fonctions $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ la valeur o. De telles conditions seront compatibles avec un état d'équilibre électrique sur tout le système.

Supposons la constante k de Helmholtz positive ou nulle, et le coefficient de polarisation K' positif ou nul pour tous les corps du système. Si la perméabilité magnétique μ est négative pour tous les corps du système, l'équilibre électrique est instable dans les conditions considérées.

Les conditions imposées à W et à $\mathfrak{J}$ en tout point de la surface Σ font, au second membre de l'égalité (78), évanouir le troisième terme.

D'autre part, pour démontrer l'instabilité de l'état d'équilibre, nous pouvons particulariser la perturbation initiale.

Si k est positif, nous pouvons, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en tout point du système, les valeurs de W et de $\frac{\partial W}{\partial t}$, à la seule condition de ne pas contredire à ce qui a été supposé aux divers points de la surface Σ. En particulier, nous pouvons prendre, en tout point du système,

$$W = C, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Nous savons, alors, qu'à tout instant et en tout point du système, W sera égal à C et $\frac{\partial W}{\partial t}$ à zéro, en sorte que la quantité F y sera constamment nulle.

Si k est nul, nous pouvons, à l'instant initial et en tout point du système, prendre arbitrairement la valeur de W, pourvu que cette valeur se réduise à C en tout point de la surface Σ. En particulier, nous pouvons, en tout point du système et à cet instant, prendre $W = C$. Alors, en vertu de l'égalité (69), dans tout le système et à tout instant, nous aurons $W = C$, en sorte que la quantité F sera encore nulle.

Si nous posons

$$M = \int \mu \left(\frac{\mathfrak{J}^2}{\rho} + K' \mathfrak{J} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} \right) d\varpi, \tag{79}$$

l'égalité (78) se réduira à

$$\pi a^2 \frac{dM}{dt} = -\int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} \right)^2 - 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi. \tag{80}$$

K' étant positif et μ négatif, le second membre de l'égalité (80) ne peut être que nul ou négatif. D'ailleurs, pour que ce second membre soit nul, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t} = 0.$$

Comme, dans tout le système, $\mathcal{F}$ est supposé fonction continue de x, y, z, les trois premières égalités exigent que $\mathcal{F}$ ait même valeur dans tout le système; et comme, sur la surface Σ, cette valeur est zéro, ces égalités exigent qu'on ait, dans tout le système, $\mathcal{F} = 0$ et, par conséquent, que la quantité M soit égale à zéro.

Dès lors, si la valeur initiale de M est négative, M demeurera sans cesse négatif, sa valeur absolue sera fonction croissante de t et croîtra au delà de toute limite avec t.

Or, comme nous disposons arbitrairement, sauf sur la surface Σ, des valeurs initiales de $\mathcal{F}$ et de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$, nous pouvons toujours faire en sorte que $\left(\frac{\mathcal{F}^2}{\rho} + K' \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)$ soit positif à l'instant initial; la valeur initiale de M est alors négative, et la valeur absolue de M croît au delà de toute limite avec t.

Il faut pour cela que la valeur absolue de l'une au moins des quantités suivantes

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathcal{F}^2 \, d\varpi, \qquad \int \mu K' \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \, d\varpi,$$

ou bien encore l'une au moins des deux quantités

$$\int \mathcal{F}^2 \, d\varpi, \qquad \int \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \, d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t.

Partant, l'une au moins des deux quantités $\mathcal{F}$ et $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$ a une valeur absolue qui, en certains points du système, croît au delà de toute limite avec t. Cette conséquence est incompatible avec la stabilité de l'équilibre électrique.

26. *Supposons maintenant que la constante k de Helmholtz soit égale à zéro; supposons que, pour tous les corps du système, la perméabilité magnétique μ soit positive et le coefficient de polarisation diélectrique* K' *négatif; nous savons que, sur le système considéré, l'équilibre électrique possède la stabilité électrostatique intégrale; mais il est affecté d'instabilité électrodynamique.*

Nous pouvons reprendre à peu près textuellement le raisonnement

qui précède. La quantité M, à laquelle nous avons pu donner une valeur initiale négative, demeurera sans cesse négative; sa valeur absolue sera fonction croissante de t et croîtra au delà de toute limite avec t.

Pour cela, il faudra que la valeur absolue de la quantité

$$\int \mu \mathrm{K}' \mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t; partant, qu'au moins en certains points du système, la valeur absolue de l'une au moins des quantités $\mathfrak{F}$ et $\frac{\mathfrak{F}}{\partial t}$ croisse au delà de toute limite avec t; par là se trouve justifiée la proposition que nous avons énoncée.

27. Revenons à la première équation (77); multiplions-en les deux membres par $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} d\varpi$ et intégrons, pour tout le volume du système, le résultat ainsi obtenu; nous trouvons l'égalité

$$\int \Delta \mathfrak{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} d\varpi - \pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu \mathrm{K}' \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi - 2\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi = \int \mathrm{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} d\varpi.$$

Une intégration par parties, portant sur le premier terme du premier membre, transforme cette égalité en la suivante

$$(81) \qquad \frac{d}{dt} \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a \, \mu \mathrm{K}' \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi$$
$$= -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi - 2 \int \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{N}} d\Sigma - 2 \int \mathrm{F} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} d\varpi.$$

Nous allons tirer diverses conséquences de cette égalité.

La première sera la suivante :

Supposons que, pour tous les corps du système, le coefficient de polarisation diélectrique et la perméabilité magnétique soient positifs ou nuls. Si la fonction W *a été déterminée au préalable; si la valeur de la fonction* $\mathfrak{F}$ *est connue, à tout instant, en tout point de la surface* Σ *qui borne le système; si, à l'instant initial, les valeurs de* $\mathfrak{F}$ *et de* $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}$ *sont données dans tout le système, on ne peut trouver*

deux intégrales distinctes de l'équation (77), continues dans tout le système ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

Chacune des deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ donne lieu à un théorème analogue.

Supposons, en effet, qu'il existe deux intégrales, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, de l'équation (77) et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'' - \mathcal{F}'.$$

La fonction $\mathcal{F}$ vérifiera l'équation en laquelle se transforme l'équation (77) lorsqu'on y fait $F = 0$; partant, elle vérifiera ce que devient l'égalité (81) après qu'on y a fait $F = 0$.

En chaque point de la surface Σ, on a, à chaque instant $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, partant $\mathcal{F} = 0$, ce qui entraîne $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0$. L'égalité (81) se réduit donc à

$$\frac{dN}{dt} = -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \tag{82}$$

égalité dans laquelle

$$N = \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{83}$$

D'après l'égalité (83), la quantité N ne peut jamais être négative. D'après l'égalité (82), où la perméabilité magnétique μ est positive ou nulle pour tous les corps du système, la grandeur N ne peut jamais être une fonction croissante de t. Si donc elle est nulle à l'instant initial, elle demeure constamment nulle.

Or, à l'instant initial, on a, en tout point du système,

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'', \qquad \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}''}{\partial t},$$

ou

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0,$$

ce qui entraîne l'égalité à zéro de la quantité N.

On a donc, quel que soit t,

$$N = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait, à tout instant et en tout

point du système,

(84) $$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0.$$

Si μ et K' sont positifs et non pas nuls, il faut, à ces égalités, joindre l'égalité

(85) $$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0.$$

La fonction $\mathcal{F}$ étant continue dans tout le système, les égalités (84) exigent qu'à un même instant elle ait, dans tout ce système, la même valeur; or, à tout instant, elle est nulle en tout point de la surface Σ; on a donc, dans tout le système et à tout instant, $\mathcal{F} = 0$ ou

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si, au lieu de donner, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant, la valeur de $\mathcal{F}$, on donne la valeur de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}$, on peut encore, avec une très légère modification, reprendre la démonstration précédente; on obtient les égalités (84); elles nous apprennent que les deux solutions $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ du problème ne peuvent différer l'une de l'autre que par une fonction du temps, la même en tous les points du système. Si, en outre, ni μ ni K' n'est égal à zéro, on peut écrire l'égalité (85), et cette fonction du temps se réduit à une constante.

28. Le *champ électrodynamique et électromagnétique* a pour composantes

(86) $$\mathcal{X} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \quad \mathcal{Y} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad \mathcal{Z} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Le *champ électrique total* a pour composantes

$$X + \mathcal{X}, \quad Y + \mathcal{Y}, \quad Z + \mathcal{Z}.$$

Imaginons qu'à partir d'un état d'équilibre on impose au système une perturbation initiale, et qu'on le maintienne ensuite dans des conditions bien déterminées; si, aux valeurs absolues des grandeurs qui définissent la perturbation initiale, on peut imposer des limites

supérieures telles que

$$\int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi$$

ne surpasse jamais une grandeur positive quelconque, donnée d'avance, on dit que le système jouit, dans les conditions considérées, de la *stabilité électrodynamique intégrale.*

Si, d'une façon semblable, on peut empêcher

$$\int [(X + \mathcal{X})^2 + (Y + \mathcal{Y})^2\, d\varpi + (Z + \mathcal{Z})^2]\, d\varpi$$

de jamais franchir une grandeur positive quelconque, donnée d'avance, on dit que le système jouit, dans les conditions considérées, de la *stabilité électrique intégrale.*

29. *Supposons la constante de Helmholtz nulle ou positive. Considérons un système exclusivement formé de corps dont le coefficient de polarisation diélectrique et la perméabilité magnétique soient positifs. Sur toute la surface qui borne ce système, maintenons à la fonction potentielle électrostatique totale* W *une même valeur* C *indépendante du temps. En chaque point de cette surface, à chacune des fonctions totales de Helmholtz,* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, *gardons une valeur indépendante du temps. Ces conditions sont compatibles avec l'établissement de l'équilibre électrodynamique.*

Nous allons démontrer que *cet équilibre jouit de la stabilité électrique lorsqu'on astreint la perturbation initiale à une condition particulière.*

Cette condition sera définie de la manière suivante :

Si la constante k de Helmholtz est positive, nous prendrons à l'instant initial, et en tout point du système,

$$W = C, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \tag{87}$$

Si la constante k de Helmholtz est nulle, nous prendrons à l'instant initial et en tout point du système,

$$W = C.$$

Les conditions données permettent d'attribuer la valeur C à la fonction W en tout point du système et à tout instant; et ce que nous

avons dit aux nos **17** et **22** montre qu'on ne saurait lui attribuer une autre valeur.

Le champ électrostatique total est donc constamment nul en tout point du système; le champ électrique total se réduit au champ électrodynamique et électromagnétique, la stabilité électrique à la stabilité électrodynamique.

On a, en vertu des égalités (86),

$$(88) \qquad \int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi = \frac{a^2}{2} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi$$

ou bien

$$\int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi \leqq \frac{a^2}{2 m \varkappa'} \int \mu K' \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi,$$

m étant la plus petite valeur de la perméabilité magnétique et $\varkappa'$ la plus petite valeur du coefficient de polarisation diélectrique pour les divers corps du système.

Si donc Q désigne une quantité positive donnée, pour avoir

$$(89) \qquad \int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi \leqq Q,$$

il suffira d'avoir

$$(90) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2 m \varkappa' Q}{3 a^2}, \\ &\int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2 m \varkappa' Q}{3 a^2}, \\ &\int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2 m \varkappa' Q}{3 a^2}. \end{aligned} \right.$$

Mais, d'autre part, l'égalité (82) nous apprend que la quantité N ne peut jamais être une fonction croissante de t, en sorte que si l'on désigne par N_0 la valeur initiale de cette quantité, on a, quel que soit t,

$$N \leqq N_0,$$

ce qui entraîne les deux inégalités

$$(91) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \leqq N_0,$$

$$(92) \qquad 2\pi a^2 \int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq N_0.$$

Laissons de côté, pour le moment, l'inégalité (91), qui nous sera utile tout à l'heure, et considérons seulement l'inégalité (92). Elle nous apprend que nous aurons certainement, quel que soit t, la première des inégalités (90), si, aux valeurs absolues initiales de $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}$, nous imposons des limites supérieures telles que nous ayons

$$(93) \qquad N_0 \leqq \frac{4\pi m \varkappa'}{3} Q.$$

On voit ainsi que le système possède, dans les conditions considérées, la stabilité électrodynamique intégrale.

50. Il serait souhaitable que la proposition précédente fût démontrée sans qu'aucune restriction fût imposée à la perturbation initiale; mais nous n'avons pu, jusqu'ici, obtenir ce résultat; nous ne pourrons établir la proposition en question, pour une perturbation initiale quelconque, qu'en lui imposant une restriction d'une autre nature; nous devrons supposer *que le système soit formé d'un seul corps homogène.*

Nous supposons positif le coefficient de polarisation diélectrique K' et, par conséquent, le pouvoir inducteur $D' = (1 + 4\pi\varepsilon' K')$.

Si la constante k de Helmholtz est nulle, l'égalité (69) nous permet de formuler cette proposition :

Aux valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation électrostatique initiale, on peut assigner des limites supérieures telles que les quantités

$$\int (W - C)^2 d\varpi, \qquad \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeurent, quel que soit t, respectivement inférieures à deux quantités positives quelconques données d'avance.

Si la constante de Helmholtz est positive, cette proposition n'est plus démontrée; cependant, nous la supposerons vraie, et c'est sous le bénéfice de cette supposition que se poursuivra notre déduction.

Posons

$$(94) \qquad T = \frac{2\sqrt{2}\pi a \varepsilon' \mu}{\rho}(W - C) + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu D' - k)\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Dans cette formule, C désigne une constante qui est, pour le moment, quelconque, mais qui, tout à l'heure, sera prise égale à la valeur uniforme de W sur la surface Σ.

Les égalités (76) pourront s'écrire

$$\text{(95)} \qquad \mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}, \qquad \mathrm{G} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}.$$

Ajoutons membre à membre, en tenant compte de ces égalités (95), l'égalité (81) et les égalités analogues qu'on peut former pour les fonctions $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$. Nous trouvons l'égalité suivante, où nous avons supposé que le système fût formé d'un corps homogène unique,

$$\text{(96)} \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a^2 \mu \mathrm{K}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi \\ &\quad = -4\pi a^2 \frac{\mu}{\rho}\int\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi - 2\int\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathrm{N}} + \ldots\right) d\Sigma \\ &\qquad - 2\int\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette égalité et dans celles qui suivront, le signe $+\ldots$ désigne des termes qui sont relatifs aux deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ et qui ont même forme que les termes, relatifs à la fonction $\mathfrak{F}$, écrits avant ce signe.

Dans cette égalité (96), transformons le dernier terme du second membre. Le système étant homogène, nous pouvons écrire :

$$\text{(97)} \quad \begin{aligned} &-2\int\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) d\varpi \\ &= \quad 2\int \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) d\varpi \\ &\quad + 2\int \mathrm{T}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\cos(\mathrm{N}, x) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\cos(\mathrm{N}, y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\cos(\mathrm{N}, z)\right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Si le système était formé de corps homogènes divers, cette égalité ne serait plus exacte, car, en vertu de sa définition (94), la fonction T varie d'une manière discontinue lorsque le point auquel elle se rapporte traverse la surface de contact de deux corps différents.

D'après l'égalité (30), nous avons

$$2\int \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) d\varpi = -2k\int \mathrm{T}\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}\, d\varpi.$$

Dans le second membre de cette égalité, remplaçons T par son expression (94), et nous trouvons successivement

$$2\int T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$= -4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon' k\frac{\mu}{\rho}\int (W-C)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}d\varpi$$
$$-\frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu D'-k)\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

$$(98)\qquad 2\int T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$=-\frac{ka}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}\int\left[(\mu D'-k)\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2+8\pi\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}(W-C)\frac{\partial W}{\partial t}\right]d\varpi$$
$$+4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon' k\frac{\mu}{\rho}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Supposons, désormais, que les valeurs de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ soient maintenues constantes en chaque point de la surface Σ; nous aurons, à chaque instant et en chaque point de cette surface,

$$(99)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}=0.$$

Réunissons toutes les égalités (96) à (99), et posons

$$(100)\quad P=\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2+2\pi a^2\mu K'\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\ldots\right]d\varpi.$$

Nous trouverons

$$(101)\quad \frac{dP}{dt}=-4\pi a\frac{\mu}{\rho}\int\left\{a\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\ldots\right]+\sqrt{2}\,k\varepsilon'\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right\}d\varpi$$
$$-\frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu D'-k)\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$
$$-4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int (W-C)\frac{\partial W}{\partial t}d\varpi.$$

La quantité k est supposée nulle ou positive; la quantité μ est supposée positive; partant, au second membre de l'égalité (101), le premier terme ne peut être que nul ou négatif, en sorte qu'on a l'iné-

galité

$$(102)\quad P \leqq P_0 - \frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu D' - k)\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi\right] - 4\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\left[\int (W - C)\frac{\partial W}{\partial t}\, d\varpi - \int (W_0 - C)\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0 d\varpi\right].$$

Dans cette inégalité, l'indice o désigne la valeur, à l'instant initial, de la quantité qu'il affecte.

La quantité K' est supposée positive; la quantité P ne peut être que positive ou nulle; il en est forcément de même du second membre de l'inégalité (102), en sorte que ce second membre est égal à sa valeur absolue.

D'ailleurs, si l'on regarde ce second membre comme la somme algébrique d'un certain nombre de termes, sa valeur absolue sera au plus égale à la somme arithmétique des valeurs absolues de ces termes.

Enfin les deux égalités

$$\left[(W - C) + \frac{\partial W}{\partial t}\right]^2 = (W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + 2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t},$$
$$\left[(W - C) - \frac{\partial W}{\partial t}\right]^2 = (W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - 2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t},$$

dont les premiers membres ne peuvent être négatifs, nous montrent que la valeur absolue du produit $2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t}$ est au plus égale à

$$(W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2.$$

En vertu de ces diverses remarques, l'inégalité (102) entraîne celle-ci :

$$(103)\quad \begin{aligned} P \leqq P_0 &+ 2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\int (W_0 - C)^2 d\varpi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k\,|\mu D' - k| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right)\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi \\ &+ 2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\int (W - C)^2 d\varpi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k\,|\mu D' - k| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right)\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette inégalité, $|\mu D' - k|$ désigne la valeur absolue de $(\mu D' - k)$.

La proposition que nous voulons établir sera évidemment démontrée si nous démontrons ceci :

Aux valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, nous pouvons imposer des limites supérieures telles que P ne surpasse jamais une quantité positive A, quelconque d'ailleurs, donnée d'avance.

Or nous avons admis qu'aux valeurs absolues des données électrostatiques initiales, on pouvait imposer des limites supérieures telles que les deux quantités

$$\int (W - C)^2 \, d\varpi, \qquad \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeurassent toujours respectivement inférieures à deux quantités positives quelconques données d'avance. On pourra donc, à ces valeurs absolues des données électrostatiques initiales, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho} \int (W - C)^2 \, d\varpi \leq \frac{A}{8},$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k \,|\, \mu D' - k \,| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right) \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leq \frac{A}{8}$$

et, en particulier,

$$2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho} \int (W_0 - C)^2 \, d\varpi \leq \frac{A}{8},$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k \,|\, \mu D' - k \,| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right) \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi \leq \frac{A}{8}.$$

Dès lors, l'inégalité (103) nous permet d'énoncer cette proposition :

Pour être assuré d'avoir, quel que soit t, l'inégalité

$$(104) \qquad P \leq A,$$

il suffit d'imposer aux valeurs absolues des données électrodynamiques initiales des limites supérieures telles qu'on ait

$$(105) \qquad P_0 \leq \frac{A}{2}.$$

Ainsi se trouve établie la stabilité que nous voulions justifier.

51. Toutes les fois que, pour un système, on a démontré, d'une

part, la stabilité électrostatique intégrale et, d'autre part, la stabilité électrodynamique intégrale, la stabilité électrique intégrale se trouve, par là même, établie pour ce système.

On a, en effet,

$$(X + \mathcal{X})^2 = 2X^2 + 2\mathcal{X}^2 - (X - \mathcal{X})^2$$

et, par conséquent,

$$(X + \mathcal{X})^2 \leqq 2X^2 + 2\mathcal{X}^2.$$

Cette inégalité et deux inégalités analogues permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\int [(X + \mathcal{X})^2 + (Y + \mathcal{Y})^2 + (Z + \mathcal{Z})^2]\, d\varpi \\ &\leqq 2\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi + 2\int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi.\end{aligned}$$

Si le système jouit de la stabilité électrostatique intégrale, on peut limiter supérieurement les valeurs absolues des données initiales de telle manière que la première intégrale du second membre demeure inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; si le système jouit de la stabilité électrodynamique intégrale, on peut limiter supérieurement les valeurs absolues des données initiales de telle manière que la seconde intégrale du second membre demeure constamment inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; si donc le système possède, à la fois, ces deux stabilités, on peut, aux valeurs absolues des données initiales, imposer des limites supérieures telles que l'intégrale du premier membre demeure toujours inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; c'est précisément ce qui définit la stabilité électrique intégrale.

Ce théorème peut être appliqué au système qui a été étudié au n° **30**.

32. En un point quelconque du système, il résulte des égalités (24) que le champ magnétique a pour composantes

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right),\\ \mathcal{M} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right),\\ \mathcal{N} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique à ces égalités (106) les calculs qui, des égalités (24), ont tiré les égalités (29), on trouve, en tenant compte de l'égalité (74),

$$(107)\quad \begin{cases} \mathcal{L} = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{M} = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{N} = -\dfrac{\varepsilon}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Dans des conditions données, compatibles avec l'équilibre magnétique, un système possède la *stabilité magnétique intégrale* si, aux valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, on peut imposer des limites supérieures telles que l'intégrale

$$(108)\quad J = \int (\mathcal{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)\, d\varpi$$

demeure toujours inférieure à une quantité positive quelconque, donnée d'avance.

La première égalité (107) donne

$$\mathcal{L}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2.$$

D'ailleurs l'égalité

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2$$

permet d'écrire

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 \leqq 2\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2.$$

Si l'on désigne par m la plus petite valeur prise, dans le système, par la perméabilité magnétique μ, que nous supposons positive, l'égalité (108) nous donnera l'inégalité

$$J \leqq \frac{2\varepsilon^2}{m^2}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2\right] d\varpi$$

et *a fortiori*

$$(109)\quad J \leqq \frac{2\varepsilon^2}{m^2}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi.$$

On voit, dès lors, que *le système étudié au n° 29 possède la stabilité magnétique intégrale.*

L'inégalité (91), en effet, nous apprend qu'on a, quel que soit t,

$$(91) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi \leqq N_0,$$

N_0 étant une quantité positive qu'on peut, en limitant supérieurement les valeurs absolues des données électrodynamiques initiales, rendre aussi petite qu'on voudra. On peut d'ailleurs, pour chacune des deux quantités $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{G}$, établir une inégalité analogue à l'inégalité (91).

Le système étudié au n° 30 possède également la stabilité électromagnétique intégrale. Nous avons vu, en effet, qu'en limitant supérieurement les valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, on pouvait faire qu'on eût, quel que soit t, l'inégalité

$$(104) \qquad P \leqq A,$$

où A est une quantité positive quelconque donnée d'avance.

D'après l'expression (100) de P, cette inégalité (104) entraîne celle-ci :

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right)^2 + \ldots \right] d\varpi \leqq A,$$

qui assure la stabilité magnétique intégrale.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME FORMÉ DE CORPS PUREMENT CONDUCTEURS.

33. Si les corps qui composent le système sont des corps *purement conducteurs*, incapables de toute polarisation diélectrique, ou bien encore si ce sont des corps *purement diélectriques*, privés de toute conductibilité, les démonstrations exposés aux deux Chapitres précédents requièrent certaines modifications que nous nous proposons d'indiquer d'une façon rapide dans ce Chapitre et dans le suivant.

Nous considérerons d'abord le cas où le système est exclusivement formé de corps purement conducteurs.

La fonction potentielle électrostatique totale W se réduit à la fonction potentielle Υ des charges électriques distribuées sur le système.

En tout point d'un corps homogène appartenant au système, cette fonction Υ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta \Upsilon - \frac{2\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = 0, \tag{110}$$

à laquelle se réduit l'équation (31). En tout point de la surface de contact entre deux corps homogènes, cette fonction vérifie la relation

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} - \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2} = 0, \tag{111}$$

à laquelle se réduit la relation (33).

Si la constante k de Helmholtz n'est pas nulle, on peut, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en tout point du système, les valeurs de Υ et de $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$, sous la condition, toutefois, que l'égalité (111) soit vérifiée en tout point des surfaces de discontinuité.

Quant au cas où la constante k de Helmholtz serait nulle, il est inutile de l'examiner en particulier ; ce qui a été dit au n° **21** peut être répété ici après qu'on y aura fait

$$K' = 0, \qquad W = \Upsilon.$$

Multiplions par $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} d\varpi$ les deux membres de l'équation (110), intégrons pour le volume entier du système, et transformons l'intégrale au moyen d'intégrations par parties où il sera tenu compte de la relation (111); nous trouverons l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{2\pi\varepsilon'}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi \\ = -\int \left[\left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right)^2 \right] d\varpi \\ -\int \left(\frac{\partial}{\partial N} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \frac{\partial \Upsilon}{\partial N} \right) \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} d\Sigma. \end{aligned} \tag{112}$$

Supposons qu'en chaque point de la surface Σ, borne du système, la quantité Υ garde une valeur indépendante du temps; alors, en tout point de la surface Σ, $\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}$ sera nul. Posons

$$(113)\quad J = \pi\int\left\{\frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\sqrt{2}\,ak}{\rho}\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}\right)^2\right\}d\varpi.$$

L'égalité (112) deviendra

$$(114)\qquad \frac{dJ}{dt} = -\int\left[\left(\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Le second membre de l'égalité (114) ne peut être que nul ou négatif; pour qu'il s'annule d'ailleurs, il faut que $\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}$ soit nul en tout point du système et, dans ce cas, J est forcément nul ou positif. On voit donc que, si la valeur initiale de J est négative, J demeurera constamment négatif, et sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Or si la constante k de Helmholtz est négative, on peut toujours faire en sorte que la valeur initiale de J soit négative; il suffit, à l'instant initial, de prendre, en tout point du système,

$$\Upsilon = 0, \qquad \frac{\partial\Upsilon}{\partial t} \neq 0.$$

On voit donc que, *si la constante de Helmholtz est négative, le système est affecté d'instabilité électrostatique.*

Si la constante de Helmholtz est positive ou nulle, J ne peut jamais être négatif; alors, à partir d'une valeur initiale positive, J ne peut jamais croître. On en conclut sans peine cette proposition : *Lorsque la constante de Helmholtz est positive ou nulle, le système jouit de la stabilité électrostatique intégrale.*

Enfin l'égalité (114) permet d'établir cette autre proposition :

Si la valeur de Υ est donnée, à tout instant, en tout point de la surface qui borne le système; si, à l'instant initial, les valeurs de Υ et de $\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}$ sont données en tout point du système; si, d'autre part, la constante de Helmholtz est positive, on ne peut trouver deux solutions continues distinctes des équations (110) *et* (111).

34. Les équations (77), que doivent vérifier les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, se réduisent ici à

$$(115)\quad \begin{cases} \Delta\mathcal{F} - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = \mathrm{F}, \\ \Delta\mathcal{G} - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} = \mathrm{G}, \\ \Delta\mathcal{H} - \dfrac{2\pi a^2\mu}{\rho}\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = \mathrm{H}. \end{cases}$$

Elles permettent de se donner arbitrairement les valeurs initiales de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$; les valeurs initiales de $\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$ sont alors déterminées.

Multiplions la première de ces équations par $\mathcal{F}d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du système; nous obtenons une égalité qui se transforme aisément en la suivante :

$$(116)\quad \pi a^2\frac{d}{dt}\int\frac{\mu}{\rho}\mathcal{F}^2\,d\varpi = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi - \int \mathrm{F}\mathcal{F}\,d\varpi - \int\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial \mathrm{N}}\,d\Sigma.$$

Supposons, en premier lieu, qu'en chaque point de la surface Σ qui limite le système, chacune des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ soit constamment nulle; au second membre de l'égalité (116), le second terme disparaît.

Supposons, en second lieu, que la fonction Υ soit maintenue constamment égale à zéro en tout point de la surface Σ; qu'à l'instant initial on prenne, dans tout le système, $\Upsilon = 0$, et en outre, si la constante k n'est pas nulle, $\dfrac{\partial\Upsilon}{\partial t} = 0$. Si la constante k est nulle ou positive, Υ demeurera constamment nul en tout point du système, il en sera de même de F, G, H. D'où la conclusion suivante : Au second membre de l'égalité (116), le second terme disparaît.

L'égalité (116) devient, dans ces conditions,

$$(117)\quad \pi a^2\frac{d}{dt}\int\frac{\mu}{\rho}\mathcal{F}^2\,d\varpi = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Cette égalité nous permet, en premier lieu, de démontrer la proposition suivante :

Si la perméabilité magnétique μ est négative pour tous les corps du système, ce système est affecté d'instabilité électrodynamique.

En effet, le second membre de l'égalité (117) est négatif ou nul. Pour qu'il soit nul à un certain instant, il faut qu'on ait, en tout point du système et à ce même instant,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = 0.$$

Il faut donc qu'à cet instant la fonction continue $\mathfrak{F}$ ait, dans tout le système, une même valeur; cette valeur ne saurait être que la valeur 0 prise par cette fonction en tout point de la surface Σ. Ainsi la quantité

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathfrak{F}^2 \, d\varpi$$

doit s'annuler à tout instant où le second membre de l'égalité (117) prend la valeur 0.

Si la valeur initiale de $\mathfrak{F}$ n'est pas identiquement nulle dans tout le système, la valeur initiale de l'intégrale considérée est forcément négative, puisque la perméabilité μ est négative pour chacun des corps du système; sa valeur absolue va donc croître au delà de toute limite avec t, ce qu'on peut regarder comme une marque de l'instabilité électrodynamique du système.

L'équation (117) va nous fournir la démonstration d'un autre théorème.

Supposons que la fonction Υ ait été déterminée sans ambiguïté pour tout instant et en tout point du système;

Supposons que la valeur de $\mathfrak{F}$ soit donnée, à tout instant, en tout point de la surface Σ qui borne le système, et en tout point du système à l'instant initial.

Si la perméabilité magnétique μ est positive pour chacun des corps qui composent le système, la première équation (115) *ne peut admettre deux intégrales continues distinctes.*

Imaginons, en effet, qu'elle en admette deux, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'' - \mathcal{F}'.$$

Chacune des deux fonctions $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ est une fonction continue qui vérifie la première équation (115), la valeur de F étant, pour toutes deux, la même; $\mathcal{F}$ est donc une fonction continue qui vérifie ce que devient la première équation (115) quand on y fait $F = 0$.

$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ prenant la même valeur en chaque point de la surface Σ, $\mathcal{F}$ est constamment égal à zéro en tout point de cette surface.

$\mathcal{F}$ vérifie donc l'équation (117).

$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ prenant la même valeur initiale en chaque point du système, la valeur initiale de $\mathcal{F}$ est nulle en tout point du système.

La perméabilité magnétique μ étant positive en tout point du système, la quantité

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathcal{F}^2 \, d\varpi,$$

dont la valeur initiale est nulle, ne peut jamais devenir négative. D'autre part, d'après l'égalité (117), elle ne peut jamais être une fonction croissante de t. Elle demeure donc constamment nulle.

Pour cela, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit égal à zéro à tout instant, en tout point du système. Partant, $\mathcal{F}'$ ne diffère jamais de $\mathcal{F}''$.

Une dernière proposition nous est fournie par l'inégalité (117).

Sur la surface Σ qui borne le système, la fonction Υ garde constamment une même valeur C et les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont maintenues égales à zéro.

La perturbation électrostatique initiale est nulle, de telle façon que, dans tout le système, Υ demeure constamment égal à C.

Si la perméabilité magnétique est positive pour chacun des corps du système, on peut, aux valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation électrodynamique initiale, assigner des limites supérieures telles que

$$\int (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) \, d\varpi$$

ne surpasse jamais une quantité positive quelconque donnée d'avance.

On peut regarder cette propriété comme la marque d'une certaine stabilité électrodynamique intégrale, mais non pas de celle qui a été définie au n° **28**.

55. On peut se demander si la proposition précédente subsiste *dans le cas où la perturbation électrostatique initiale n'est pas identiquement nulle*. Nous allons démontrer que *cette proposition subsiste pourvu que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1° *Le système se compose d'un corps homogène unique;*

2° *La perméabilité magnétique de ce corps n'est pas inférieure à la constante k de Helmholtz.*

Ajoutons membre à membre, en effet, l'égalité (116) et les deux égalités analogues qu'on peut former pour les deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$; tenons compte, en outre, des égalités (95); nous obtenons une égalité que l'homogénéité du corps permet de transformer en la suivante :

$$(118)\qquad \begin{aligned} &\pi a^2 \frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int(\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2+\mathcal{H}^2)\,d\varpi \\ &= -\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2+\ldots\right]d\varpi \\ &\quad+\int \mathrm{T}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi \\ &\quad+\int\left\{\mathcal{F}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial \mathrm{N}}-\mathrm{T}\cos(\mathrm{N},x)\right]+\ldots\right\}d\Sigma. \end{aligned}$$

Tenons compte maintenant des égalités (13), (16), (25) et (26) qui nous donnent ici

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}=-k\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}.$$

Invoquons également l'égalité (94), après y avoir remplacé W par Υ et D′ par l'unité; nous trouverons

$$(119)\qquad \begin{aligned} &\int \mathrm{T}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi \\ &= -\sqrt{2}\,\pi k a\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int(\Upsilon-\mathrm{C})^2\,d\varpi \\ &\quad-\frac{a}{\sqrt{2}}k(\mu-k)\int\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Si, comme nous le supposons, les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, sont maintenues constamment nulles en tout point de la surface Σ, les égalités (118) et (119) donnent l'égalité

$$(120)\quad \pi a \frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dt} \int \left[a(\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2) + \sqrt{2}\, k \varepsilon (\Upsilon - C)^2 \right] d\varpi$$
$$= \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right)^2 + \ldots + \frac{a}{\sqrt{2}} k(\mu - k) \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi.$$

Si, comme nous l'avons supposé, la constante k est nulle ou positive, si elle ne surpasse pas la perméabilité magnétique μ, le second membre de cette égalité (120) ne peut jamais être négatif. On établit aisément alors la proposition énoncée.

En outre, si la constante k est positive, on démontre, à l'aide de cette égalité (120), la proposition que voici :

On peut limiter supérieurement les valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation initiale de telle manière que l'intégrale

$$\int (\Upsilon - C)^2 d\varpi$$

ne surpasse jamais une quantité positive quelconque donnée d'avance.

36. Pour un système exclusivement formé de corps conducteurs purs, on peut encore écrire l'équation (81), après y avoir remplacé K' par 0. Dans les conditions où l'équation (81) se réduit à l'égalité (82), nous pourrons écrire ici :

$$(121)\qquad \frac{dN}{dt} = -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} \right)^2 d\varpi$$

avec

$$(122)\qquad N = \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi.$$

L'égalité (121) nous permet de démontrer trois propositions dont voici la première :

En tout point de la surface Σ qui borne le système, on maintient à la fonction Υ une valeur uniforme et constante C. En tout point de cette même surface, les trois fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont maintenues égales à zéro.

Si la constante k de Helmholtz est positive ou nulle et si la perméabilité magnétique est négative pour tous les corps du système, l'équilibre électrique qui correspond à ces conditions est affecté d'instabilité électrodynamique.

Supposons nulle la perturbation électrostatique initiale; comme la constante k est supposée positive ou nulle, on sera assuré que la fonction Υ garde, sans cesse et dans tout le système, la valeur C.

L'égalité (120) se réduira à la forme (121).

Le second membre de l'égalité (121) ne peut être que nul ou positif.

Pour que le second membre s'annule, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0.$$

En vertu de la première égalité (115), où F est, ici, égal à zéro, cette égalité ne peut avoir lieu à un instant donné, en tout point du système, à moins qu'on n'ait en même temps

$$\Delta \mathcal{F} = 0.$$

Mais comme $\mathcal{F}$ est nul en tout point de la surface qui borne le système, $\mathcal{F}$ ne peut, en tout point de ce système, vérifier l'équation de Laplace, à moins d'être nul en tout point du système, cas auquel on a, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0.$$

Si donc, le second membre de l'égalité (121) s'annule à un instant donné, N s'annule au même instant. On en conclut sans peine que N croîtra au delà de toute limite avec t si sa valeur initiale est positive.

Or, pour valeur initiale de $\mathcal{F}$, prenons une quantité qui ne soit pas identiquement nulle dans tout le système. Comme $\mathcal{F}$ est nul sur la surface qui borne le système, $\mathcal{F}$ n'aura pas, à l'instant initial, même valeur dans tout le système et l'on n'aura pas, à cet instant, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0.$$

La valeur initiale de N sera donc positive; N croîtra au delà de toute limite avec t, ce que nous pouvons regarder comme une marque d'instabilité électrodynamique.

Notre second théorème sera celui-ci :

Supposons la perméabilité magnétique positive pour tous les corps qui composent le système.

Si la fonction Υ *est connue, à tout instant, en tout point du système; si les fonctions* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ *sont données, à tout instant, en tout point de la surface qui borne le système, et, à l'instant initial, en tout point du système, aucune des équations* (115) *ne peut admettre deux intégrales continues distinctes.*

Gardons les notations dont, au n° **34**, nous avons fait usage pour démontrer ce même théorème.

La fonction $\mathcal{F}$ vérifie l'égalité (121) dont le second membre ne peut être que nul ou négatif; la quantité N, qui ne peut être que nulle ou positive, ne peut surpasser sa valeur initiale. Or, à l'instant initial, $\mathcal{F}$ est nul en tout point du système; il en est donc de même de

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}.$$

La valeur initiale de N est o. Dès lors, N est constamment nul. Partant, on a, à tout instant, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0,$$

en sorte qu'à chaque instant la fonction continue $\mathcal{F}$ a même valeur en tout point du système; mais cette valeur, qui doit être zéro en tout point de la surface qui limite le système, ne peut être partout que zéro. On a donc, en tout point du système et à tout instant,

$$\mathcal{F} = 0$$

ou

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Voici enfin notre troisième proposition :

Supposons positive ou nulle la constante de Helmholtz.

Supposons positive la perméabilité magnétique de chacun des corps du système.

Imaginons qu'en tout point de la surface qui borne le système la fonction Υ *garde une valeur uniforme et constante* C, *et que les trois fonctions* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ *restent constamment égales à zéro.*

Pour toute perturbation initiale qui n'altère ni Υ *ni (si k est positif)* $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$, *l'équilibre compatible avec ces conditions possède la stabilité magnétique intégrale.*

Dans ce cas, en effet, Υ demeure constamment égal à C, et F, G et H à zéro. On peut écrire l'égalité (121). Celle-ci nous apprend que N ne peut jamais surpasser sa valeur initiale. De ce résultat les considérations développées au nº **32** permettent de tirer la proposition énoncée.

De l'égalité (121) nous pouvons également conclure que la première des trois quantités

$$\int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment; il en va naturellement de même des deux autres. On peut, si l'on veut, regarder cette propriété comme constituant une certaine espèce de stabilité électrodynamique intégrale; mais cette stabilité n'est pas identique à celle qui a été définie au nº **28**.

Les résultats qui ont été établis, en dernier lieu, au sujet de la stabilité magnétique et de la stabilité électrodynamique, peuvent être, à l'aide d'une démonstration semblable à celle qui a été donnée au nº **30**, affranchis de toute restriction relative à la perturbation initiale. En revanche, il faut alors supposer le système formé d'un seul corps homogène, et admettre les deux postulats qui ont été énoncés au nº **30**. De ces deux postulats il en est un qui peut ici, comme nous l'avons vu au numéro précédent, être justifié, du moins si la constante de Helmholtz ne surpasse pas la perméabilité magnétique du corps qui constitue le système.

CHAPITRE V.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME FORMÉ DE CORPS PUREMENT DIÉLECTRIQUES.

57. Nous allons maintenant étudier un système formé de corps dénués de toute conductibilité ; pour chacun de ces corps, la résistance spécifique ρ sera infinie.

Dans un tel système, la fonction potentielle électrostatique totale W se réduit à la fonction potentielle V′ de la polarisation diélectrique. L'équation (32), vérifiée en tous les points du système, se réduit à

$$(1 + 4\pi\varepsilon' K')\Delta V' - 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} = 0. \tag{123}$$

L'équation (34), vérifiée en tout point de la surface de contact de deux corps homogènes, devient

$$(1 + 4\pi\varepsilon' K'_1)\frac{\partial V'}{\partial n_1} + (1 + 4\pi\varepsilon' K'_2)\frac{\partial V'}{\partial n_2} = 0. \tag{124}$$

Ce sont là les équations qui doivent servir à déterminer la fonction V′.

A l'instant initial, on pourra, *si la constante k de Helmholtz n'est pas nulle*, choisir arbitrairement, dans tout le système, les valeurs de V′ et de $\frac{\partial V'}{\partial t}$, sous la réserve que l'égalité (124), et celle qu'en déduit une différentiation par rapport à t, soient vérifiées ; sous la réserve aussi que soit vérifiée la condition imposée à la fonction V′ en tout point de la surface qui limite le système.

58. Multiplions par $V' d\varpi$ les deux membres de l'égalité (123) et, pour le volume entier du système, intégrons le résultat obtenu ; nous parviendrons à une égalité qu'il est aisé de transformer en la suivante :

$$\int (1 + 4\pi\varepsilon' K')V'\Delta V'\, d\varpi + 2\sqrt{2}\,\pi a k \int K'\left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 d\varpi = 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int K' V' \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi.$$

Cette égalité peut, à son tour, moyennant l'égalité (124), se

transformer en la suivante :

$$(125)\quad \begin{aligned} 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int K' V' \frac{\partial V'}{\partial t}\, d\varpi &= -\int \Big\{ (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right] \\ &\qquad - 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 \Big\}\, d\varpi \\ &\quad - \int (1 + 4\pi\varepsilon' K') V' \frac{\partial V'}{\partial N}\, d\Sigma. \end{aligned}$$

D'autre part, multiplions par $d\varpi$ les deux membres de l'égalité (123) et intégrons pour le volume entier du système; en vertu de l'égalité (124) l'égalité obtenue se transformera en celle-ci :

$$(126)\quad 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int K' \frac{\partial V'}{\partial t}\, d\varpi = -\int (1 + 4\pi\varepsilon' K') \frac{\partial V'}{\partial N}\, d\Sigma.$$

De l'égalité (125) retranchons membre à membre l'égalité (126), après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par une constante quelconque C. Nous trouverons l'égalité

$$(127)\quad \begin{aligned} 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int K' (V' - C) \frac{\partial V'}{\partial t}\, d\varpi &= -\int \Big\{ (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right] \\ &\qquad - 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 \Big\}\, d\varpi \\ &\quad - \int (1 + 4\pi\varepsilon' K') (V' - C) \frac{\partial V'}{\partial N}\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Supposons ou bien que la fonction V' garde, en tout point de la surface qui borne le système, une valeur uniforme et constante C, ou bien que le champ électrique soit, en tout point de cette surface, maintenu constamment nul. Ces hypothèses sont compatibles avec l'établissement d'un état d'équilibre électrique.

Si, pour chacun des corps du système, les deux inégalités

$$(128)\quad 1 + 4\pi\varepsilon' K' > 0,$$

$$(129)\quad k K' < 0$$

sont vérifiées, cet équilibre est instable.

En effet, au second membre de l'égalité (127), le second terme disparaît en vertu des hypothèses faites.

Grâce aux inégalités (128) et (129), le premier terme ne peut être que négatif ou nul. Pour qu'il soit nul, d'ailleurs, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0,$$

cas auquel la quantité

$$k \int K'(V' - C) \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi$$

est égal à zéro. Si donc, à l'instant initial, cette quantité est négative, elle demeurera toujours négative et, avec le temps, sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite.

Or, après avoir, à l'instant initial, donné à V', en chaque point du système, une valeur généralement différente de C, mais qui se réduise à C en tout point de la surface Σ, et qui vérifie l'égalité (124) en chaque point d'une surface de discontinuité, nous serons libres de prendre, à ce même instant initial et en chaque point du système,

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = \lambda(V' - C),$$

λ étant une constante positive. Alors, en vertu de l'égalité (129), la valeur initiale de

$$k \int K'(V' - C) \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi$$

sera sûrement négative, et le théorème énoncé sera démontré.

De ce théorème nous pouvons tirer deux corollaires :

1° *Il existe certainement des corps dont le coefficient de polarisation* K' *est positif. Pour un système formé de tels corps, l'équilibre électrique serait instable si la constante k de Helmholtz était négative, en sorte que cette hypothèse doit être rejetée.*

2° *Supposons positive la constante k de Helmholtz; on ne peut admettre l'existence de corps dont le coefficient de polarisation diélectrique* K' *serait négatif et le pouvoir inducteur spécifique* $(1 + 4\pi\varepsilon K')$ *positif; sur un système formé de tels corps, en effet, l'équilibre électrique serait instable.*

39. Laissons de côté, pour le moment, le cas où la constante de Helmholtz serait nulle. *Supposons, désormais, que cette constante soit positive :*

(130) $$k > 0,$$

et qu'il en soit de même, pour tout corps du système, du coefficient de polarisation diélectrique :

(131) $$K' > 0.$$

Multiplions par $\frac{\partial V'}{\partial t}\, d\varpi$ les deux membres de l'équation (123) et intégrons, pour le volume entier du système, le résultat de cette multiplication; nous obtiendrons une égalité que l'égalité (124) permet aisément de transformer en la suivante :

(132) $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\Big\{(1+4\pi\varepsilon' K')\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right]&\\ +2\sqrt{2}\,\pi a k K'\left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2\Big\}\,d\varpi&\\ +2\int(1+4\pi\varepsilon' K')\frac{\partial V'}{\partial t}\frac{\partial V'}{\partial N}\,d\Sigma&=0.\end{aligned}$$

Cette égalité (132) va nous permettre d'établir deux propositions dont voici la première :

Si l'on se donne à chaque instant, en tout point de la surface Σ qui borne le système, soit la valeur de V', soit la valeur de $\frac{\partial V'}{\partial n}$; si, à l'instant initial, on se donne, en tout point du système, la valeur de V' et celle de $\frac{\partial V'}{\partial t}$, il ne peut exister deux intégrales continues distinctes des équations (123) *et* (124).

Supposons, en effet, qu'il en existe deux, V'' et V''', et posons

$$V' = V''' - V''.$$

Chacune des deux fonctions continues V'', V''' vérifiant les égalités (123) et (124), on peut en dire autant de leur différence V', en sorte que V' vérifie l'égalité (132).

Mais, en chaque point de la surface Σ, on a ou bien $V'' = V'''$, ou

bien $\frac{\partial V''}{\partial N} = \frac{\partial V'''}{\partial N}$; on a donc ou bien $V' = 0$, ou bien $\frac{\partial V'}{\partial N} = 0$; la première de ces deux égalités, vérifiée quel que soit t, entraîne d'ailleurs $\frac{\partial V'}{\partial t} = 0$. Ainsi, au premier membre de l'égalité (132), le second terme disparaît. Si l'on pose

$$(133)\qquad P = \int \left\{ (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right] + 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi,$$

et si l'on désigne par P_0 la valeur initiale de P, l'égalité (132) se réduit à

$$(134)\qquad P = P_0.$$

Mais, à l'instant initial, on a, dans tout le système,

$$V'' = V''',$$

partant

$$V' = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0.$$

On a aussi

$$\frac{\partial V''}{\partial t} = \frac{\partial V'''}{\partial t} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0.$$

Ici donc $P_0 = 0$, et l'égalité (134) nous montre que, quel que soit t,

$$P = 0.$$

En vertu des inégalités (130) et (131), cette égalité ne saurait avoir lieu si l'on n'avait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0.$$

Cette dernière égalité nous apprend qu'en tout point du système V' garde sans cesse la valeur 0 que cette grandeur avait à l'instant initial, en sorte que, sans cesse aussi, on y a

$$V'' = V'''.$$

Voici notre seconde proposition :

En tout point de la surface qui borne le système, ou bien la fonction potentielle V' garde une même valeur indépendante du temps $\left(\frac{\partial V'}{\partial t} = 0\right)$, *ou bien le champ électrostatique est maintenu égal à zéro* $\left(\frac{\partial V'}{\partial N} = 0\right)$. *Ces conditions sont compatibles avec un état d'équilibre électrique. Cet état d'équilibre possède assurément la stabilité électrostatique intégrale.*

Au premier membre de l'égalité (132), les hypothèses faites font disparaître le second terme, en sorte que l'égalité (132) se réduit à l'égalité (134). Celle-ci, à son tour, en vertu de l'égalité (133) et des inégalités (130) et (131), donne l'inégalité

(135) $$\int (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \leqq P_0.$$

Les composantes du champ électrostatique sont ici

$$X = -\varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial y}, \qquad Z = -\varepsilon' \frac{\partial V'}{\partial z}.$$

L'inégalité (135) entraîne donc celle-ci :

(136) $$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi \leqq \frac{P_0}{\varepsilon'^2 (1 + 4\pi\varepsilon'\varkappa')},$$

$\varkappa'$ étant la plus petite valeur prise, au sein du système, par le coefficient de polarisation diélectrique K'.

Si l'on veut que le premier membre de cette inégalité demeure toujours inférieur à une quantité positive A donnée d'avance, il suffit de limiter supérieurement, en tout point du système, les valeurs absolues initiales du champ et de $\frac{\partial V'}{\partial t}$, de telle manière qu'on ait

$$P_0 < \varepsilon'^2 (1 + 4\pi\varepsilon'\varkappa') A.$$

40. Venons maintenant au *cas où la constante de Helmholtz est nulle :*

$$k = 0.$$

L'équation (123) se réduit à l'équation de Laplace

(137) $$\Delta V' = 0.$$

Les équations (137) et (124) sont celles qui déterminent la polarisation diélectrique d'équilibre. Si le pouvoir inducteur spécifique $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$ est positif pour tous les corps du système, on sait que cette distribution est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on se donne, en chaque point de la surface qui borne le système, soit la valeur de V', soit la valeur de $\frac{\partial V'}{\partial N}$

Ainsi, à chaque instant, la polarisation diélectrique sur le système est celle qui correspond à l'état d'équilibre déterminé par les valeurs que V' ou $\frac{\partial V'}{\partial N}$ prennent, à cet instant, en chaque point de la surface qui borne le système.

En particulier, si V' garde sans cesse, sur cette surface, une valeur uniforme et constante, ou bien si $\frac{\partial V'}{\partial N}$ est maintenu constamment égal à zéro, le système demeure constamment exempt de polarisation diélectrique.

La question de stabilité ne se pose plus pour un tel état d'équilibre.

41. Une fois V' connu, les trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont déterminées par les équations (77) qui deviennent ici

$$(138) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\mathcal{F} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= F, \\ \Delta\mathcal{G} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} &= G, \\ \Delta\mathcal{H} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} &= H. \end{aligned} \right.$$

Au sujet de ces égalités, nous pouvons répéter textuellement tout ce qui a été dit du n° **25** au n° **32**. Il suffit, dans les démonstrations et dans les égalités, de biffer tout terme qui contient $\frac{1}{\varepsilon}$ en facteur.

TABLE DES MATIÈRES.

SIXIÈME SÉRIE. — TOME X.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

FIN DU TOME X DE LA SIXIÈME SÉRIE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
52426 Quai des Grands-Augustins, 55.

Journal de mathématiques
pures et appliquées

